Relevanța utilizării modelelor matematice în teoria politicilor macroeconomice

Nora Mihail
Profesor universitar doctor
Academia de Studii Economice București

Abstract. *The article presents a look of the principal's mathematical models – starting with Theil, Hansen and Tinbergen work – and their results used to analyse and design macroeconomic policies. In modeling field changies are very fast in theoretical aspects of modeling the divers problems of macroeconomic policies and in using in practice the different political models elaboration. The article points out the problems of static and dynamic theory used in macropolicies modeling.*

Key words: political model; political objective; instrument variable; loss function; decision rule.

Abordarea teoretică a modelării politicilor macroeconomice s-a dezvoltat relativ independent în cadrul macroeconomiei, începând cu lucrările lui Tinbergen și Theil, și continuând cu contribuțiile lui Meade, Preston și Pagan, Turnowski ș.a.

Se remarcă existența a două direcții teoretice importante în abordarea modelelor politicilor macroeconomice. Prima direcție, dominantă în perioada de început a acestor preocupări (1964-1970), o constituie *teoria statică a politicilor macroeconomice*, în cadrul căreia erau studiate interacțiunile dintre instrumente și scopuri care se presupuneau constante în timp.

Deși obiectivele politice puteau fi fie fixate, fie flexibile, modelul politic introdus și studiat de această teorie era, în general, modelul liniar static. Existența, unicitatea și proiectarea politicilor erau chestiunile centrale ale demersului analitic, în cadrul acestuia fiind utilizate cu precădere metodele algebrei liniare și teoriei funcțiilor liniare.

După anul 1970, prin extinderea teoriei la cazurile de modele dinamice, tot mai frecvent utilizate în macroeconomie, apare *teoria dinamică a politicilor macroeconomice*. În contextul dinamic, mult mai larg, interacțiunea dintre obiectivele politice și modelul politic este abordată ca fiind variabilă în timp. Ca și în cazul static, obiectivele politice dinamice sunt fixe sau flexibile. Dar obiectivele dinamice pot lua și alte forme decât în cazul static: obiective punctuale, obiective staționare sau obiective traiectorie. Acest lucru lărgește și mai mult aria de aplicare a teoriei dinamice a politicilor macroeconomice, ca și problematica analitică a acesteia.

Controlabilitatea, observabilitatea și stabilitatea soluțiilor politice obținute devin problemele centrale. Metodele aplicate în studiul acestor proprietăți ale modelelor politice dinamice provin din teoria ecuațiilor diferențiale, analiza funcțiilor complexe, cibernetică, teoria matematică a sistemelor ș.a.

Trecerea de la modelele statice la cele dinamice, care constituie un progres evident al teoriei politicilor macroeconomice, ridică, însă, o serie de probleme în ce privește cadrul de reprezentare a modelelor și obiectivelor dinamice. Varietatea de modele (în formă structurală, în formă redusă sau sub formă de sistem liniar) combinată cu tipurile principale de obiective (punctuale, staționare sau sub formă de traiectorie) ridică problema alegerii celei mai bune combinații de model și obiectiv cu ajutorul căreia se poate reprezenta sistemul economic real.

O altă problemă, dificil de rezolvat, este cea legată de introducerea, în problemele politice dinamice, a unor funcții de performanță, deci transformarea lor în probleme de optimizare. O perioadă însemnată de timp problemele politice optimale au constituit punctul central în dezvoltarea teoriei politicilor macroeconomice.

Lucrările lui Aoki (1975) și Aoki și Canzoneri (1979) introduc o *problemă de optimizare dinamică* în care scopurile sunt date exogen. Sistemul obținut se rezolvă printr-o metodă de optimizare, de exemplu, controlul optimal, pentru a obține valorile instrumentelor care vor asigura că scopurile date sunt atinse. Aplicarea unei astfel de metode s-a lovit, însă, de mari dificultăți legate de algoritmul de calcul și de complexitatea operării cu condițiile inițiale ale problemei.

O altă metodă, dezvoltată de Pindyck (1973), permite realizarea unui echilibru prin care valorile scopurilor sunt selectate arbitrar și ele nu corespund, neapărat, celor rezultând din dinamica modelului. Dacă scopurile astfel selectate nu sunt compatibile, atunci costul asociat problemei devine infinit. Se caută, atunci, obținerea unor obiective a căror atingere este finită, acestea garantând că s-a obținut o politică admisibilă.

În prezent, efortul teoretic este orientat către elaborarea unei teorii coerente a politicilor macroeconomice care să încorporeze, pe lângă aspectele menționate mai sus, influențele unor factori cum ar fi neliniaritatea, discontinuitatea, incertitudinea, schimbările de structură și de sistem economic ș.a. Numai în acest mod teoria politicilor macroeconomice va putea fi utilizată frecvent de economiști în rezolvarea unor probleme practice.

Al doilea aspect la care ne referim este cel al *dezvoltării unor modele politice aplicate*. Încă de la începutul dezvoltării ei, teoria politicilor macroeconomice și-a propus și concretizarea în modele aplicative a conceptelor și metodelor teoretice elaborate.

Însuși Tinbergen a elaborat o serie de modele, utilizate de guvernul olandez pentru adoptarea diferitelor decizii politice. Entuziasmul inițial stârnit de aceste modele, și amintim aici *modelul francez METRIC, modelul britanic CAMBRIDGE, modelele americane* ș.a., s-a stins în jurul anilor 1975-1980, când s-a înțeles că un astfel de model poate fi realizat cu niște costuri mari, fără să existe garanția obținerii unor rezultate corespunzătoare.

Din această cauză, s-a renunțat la ideea de a se construi un model politic global, pentru întreaga economie, încercându-se obținerea unor modele de simulare a unor sectoare sau domenii economice, în cadrul cărora perturbațiile introduse reprezintă, de fapt, influențele celorlalte sectoare ale economiei.

În continuare, vom prezenta modelele matematice statice și dinamice ale politicilor macroeconomice, împreună cu cele mai importante proprietăți ale acestora.

Modele matematice statice ale politicilor macroeconomice

Formularea modelului static

Fie sistemul algebric liniar:

$$Ax + Cz = Bu + Dw \tag{1}$$

sau

$$[A\ C]\begin{vmatrix} x \\ z \end{vmatrix} = [B\ D]\begin{vmatrix} u \\ w \end{vmatrix} \tag{2}$$

cu A o matrice de dimensiunile (N+R)×N, C de dimensiunile (N+R)×R, B de dimensiunile (N+R)×K și D de dimensiunile (N+R)×J.

x este un vector N×1 al scopurilor endogene, z un vector R×1 al altor variabile endogene, u un vector K×1 al instrumentelor exogene și w un vector J×1 al datelor exogene.

Acest sistem definește un *model static liniar al politicii macroeconomice* cu N+R ecuații și N+R variabile endogene și K+J variabile exogene.

Modelul satisface regula de calcul a consistenței ecuaționale și vom presupune că satisface și condiția de rang ($\rho[A : C] = N+R$).

Așadar, pentru oricare valori date ale variabilelor exogene u și w, modelul liniar al politicii macroeconomice va determina întotdeauna valorile unice ale variabilelor endogene x și z. Un astfel de model este o reprezentare pozitivă a unui sistem economic, obținută, de exemplu, din teoria economică și/sau estimări econometrice.

Teoria matematică a politicilor macroeconomice utilizează această reprezentare pozitivă într-un mod normativ, interschimbând variabilele endogene și exogene.

De exemplu, fixând o anumită configurație dorită a scopurilor, $x = \bar{x}$, variabilele-scop precedente sunt privite ca exogene; în același timp, variabilele instrumentale exogene sunt acum determinate endogen ca răspuns la scopurile date exogen.

Dacă sau nu acest sistem invers este consistent (deci dacă admite ca soluție un astfel de vector al politicilor endogene) și, dacă da, cum aceste soluții sau soluție pot fi determinate sunt problemele centrale ale teoriei statice a politicilor macroeconomice.

Pentru a introduce ideile de bază, modelul de mai sus va fi simplificat eliminând variabilele endogene nonscop. Pentru aceasta, împărțim cele N+R ecuații în două submulțimi: o mulțime de N ecuații – să spunem primele N – și o mulțime de R ecuații – ultimele R:

$$A_1x + C_1z = B_1u + D_1w \quad \text{(N ecuații)} \tag{3}$$

$$A_2x + C_2z = B_2u + D_2w \quad \text{(R ecuații)} \tag{4}$$

Din cea de-a doua mulțime îl scoatem pe z:

$$z = -C_2^{-1}\left[B_2u + D_2w - A_2x\right] \tag{5}$$

presupunând că matricea C_2 este nesingulară; vom presupune, apoi, că cele R variabile nonscop sunt date de un sistem de ecuații liniar independent.

Înlocuind z în prima mulțime de ecuații, obținem:

$$A^*x = B^*u + d^* \tag{6}$$

unde $(\cdot)^* = (\cdot)_1 + C_1C_2^{-1}(\cdot)_2$, iar $d^* = D^*w$.

Matricea A* se numește *matricea coeficienților scopurilor,* iar matricea B* – *matricea coeficienților instrumentelor*. Vectorul d* este un vector al „variabilelor” exogene care sunt, de fapt, transformări ale variabilelor exogene adevărate. Modelul introdus de Hansen este un exemplu în acest sens.

Modelul cu obiective fixate

Aspectul esențial al teoriei modelelor politice statice constă în combinația dintre modelul politic și obiectivele politice. Există două tipuri mari de obiective politice, și anume: obiective politice fixate și obiective politice flexibile.

Obiectivele politice fixate se introduc cu ajutorul unor ecuații exprimând restricțiile impuse obiectivelor politice. În analiza de tip Tinbergen cel mai simplu mod de a introduce obiectivele politice constă în fixarea scopurilor politice: $y = \bar{y}$.

Prin aceasta se exprimă dorința decidentului politic ca acele N scopuri să fie atinse în condițiile în care se dau datele exogene d și se utilizează K instrumente.

Formal, aceste N scopuri se adaugă celor N ecuații ale modelului politic, obținându-se sistemul cu scopuri fixate:

Modelul politic: $Mu - y = 0$ (7)

Obiectivul politic: $y = \bar{y} \equiv \bar{x} - A^{-1}\bar{d}$ (8)

Înlocuind ecuația obiectivului în model, obținem: *problema cu scopuri fixate:*

$$\left\{Mu = \bar{y};\ \bar{y} \equiv \bar{x} - A^{-1}\bar{d},\ u \in R^K,\ \bar{y} \in R^N\right\} \quad (9)$$

Odată formulată această problemă, apar imediat trei aspecte analitice importante:

A) Existența politicii; B) Unicitatea politicii; C) Proiectarea politicii.

În momentul în care este specificat obiectivul politic – în acest caz, un obiectiv cu scop fixat – aceste trei probleme ale existenței, unicității și proiectării politicilor macroeconomice sunt chestiunile fundamentale ale teoriei statice a politicilor macroeconomice.

Afirmația rămâne adevărată și pentru teoria dinamică a politicii macroeconomice, dar cu specificarea că *stabilitatea* apare că fiind a patra problemă fundamentală.

Existența politicii macroeconomice poate fi împărțită și ea în două cazuri principale:

A1) *Existența slabă (controlabilitatea statică slabă):* existența unei politici $u = \bar{u}$ pentru un $y = \bar{y}$ dat, astfel încât perechea $(\bar{u}, \bar{y})$ satisface modelul politic cu scop fixat $(M\bar{u} = \bar{y})$;

A2) *Existența globală (controlabilitatea statică tare):* existența politicilor $u = \bar{u}$ pentru toate configurațiile posibile $y = \bar{y}$.

Existența slabă a politicilor macroeconomice presupune specificarea unui obiectiv cu scop fixat particular $\bar{x}$ și a unui vector de date exogen particular $\bar{d}$. În schimb, existența globală a acestora admite o specificare arbitrară completă a vectorului dorit al scopurilor și/sau a vectorului exogen al datelor.

Deci, un model politic poate avea proprietatea de existență slabă (A1), dar nu și pe cea de existență globală (A2). Pentru un astfel de model, va exista o submulțime de specificații $(\bar{x}, \bar{d})$ pentru care politicile $u = \bar{u}$ există, precum și o submulțime complementară pentru care nu există politici macroeconomice.

Dar dacă modelul politic posedă proprietatea (A2), acest lucru presupune că nu există specificația $(\bar{x}, \bar{d})$ pentru care decidentul politic să nu poată găsi o politică adecvată u.

Deoarece procedura prin care decidentul alege o configurație particulară cu scop fixat nu este analizată aici, existența globală este o proprietate calitativă dorită a unui model politic întrucât ea elimină problema existenței politicii pentru o configurație particulară aleasă. Ea elimină, de asemenea, problema existenței politicii pentru un vector de date particular dat, din nou un lucru de dorit, deoarece nicio restricție nu este introdusă apriori asupra acestor variabile.

Acest accent pe existența globală este caracteristic pentru teoria politicii economice, atât cea statică, cât și cea dinamică.

Dacă existența este satisfăcută în amândouă sensurile, decidentul politic va dori, de asemenea, să cunoască dacă ea implică o politică unică sau nu (B). Această problemă a *unicității* este importantă deoarece atrage după sine și problema următoare, a proiectării politicii macroeconomice.

Proiectarea (C) trebuie analizată separat deoarece existența unei politici macroeconomice, fie ea unică sau nu, nu înseamnă în mod necesar că decidentul știe cum să găsească o politică adecvată. Prin cunoașterea existenței unei politici nu se cunoaște și politica însăși; problema proiectării este deci să dezvolte o procedură pentru a găsi o politică adecvată.

Înainte de a analiza aceste trei probleme, să arătăm și alte posibilități de a formaliza problema cu obiective fixate. Din lucrările lui Theil (Theil, 1964) și Tinbergen (Tinbergen, 1963) rezultă că este posibilă o extensie a acestei probleme prin specificarea nu numai a scopurilor, dar și a instrumentelor.

Putem atunci adăuga la problema cu scopuri fixate, conținând 2N ecuații, alte L ecuații, $0 \le L \le K$, reprezentând valorile fixate dorite ale celor L instrumente politice.

Se obține, astfel, *problema cu scopuri și instrumente fixate:*

Modelul politic: $Mu - y = 0$

Scopuri fixate: $y = \bar{y}$

Instrumente fixate: $Su = u^*$;

unde S este o matrice L×K - dimensională, $u^* \in R$, $0 \le L \le K$. Aici S este o matrice care selectează L din cele K instrumente, având valorile dorite asignate de u^*.

Neglijând, deocamdată, motivele pentru care se specifică instrumentele, se poate partiționa vectorul instrumentelor $u \in R^K$ în doi vectori; $u_f \in R^{K-L}$ și $u_r \in R^L$ - deci într-un subvector L×1, u_r, al instrumentelor restricționate determinate de $Su = u^*$ și un subvector (K-L)×1, u_f, al instrumentelor libere.

După această partiție, modelul politic poate să fie scris în modul următor:

$$M_f u_f + M_r u_r - y = o; \quad M \equiv [M_f : M_r]u \equiv \begin{vmatrix} u_f \\ u_r \end{vmatrix} \quad (10)$$

Acum, putem înlocui în problema cu scopuri și restricții fixate și obținem:

$$\left\{\begin{matrix} M_f u_f = \overline{y_r}, \bar{y}_r \equiv \bar{x} - A^{-1}d - M_r u_r, \\ u_f \in R^{K-L}, \bar{y}_r \in R^N, 0 \le L \le K \end{matrix}\right\} \quad (11)$$

Este clar că problema cu scopuri fixate este un caz particular al problemei cu scopuri și obiective fixate când L = 0.

Tehnic, impunerea unor instrumente fixate reduce atât dimensiunea pe coloane a matricei coeficienților instrumentali în forma redusă M, cât și dimensiunea vectorului instrumentelor libere u_f, dar nu are alt efect calitativ.

De aceea, în cele ce urmează, vom analiza existența, unicitatea și proiectarea *problemei politice cu scopuri fixate:*

$$\left\{Pu = y, u \in R^k, y \in R^m\right\} \quad (12)$$

Aici $k \in [\,0, 1, ..., K\,]$ reprezintă numărul de instrumente libere, iar m = N numărul de scopuri naturale. Vom numi u *vectorul instrumentelor,* iar y *vectorul scopurilor.*

Problema politică cu scopuri fixate de mai sus se numește *model politic Tinbergen* dacă și numai dacă k = m; în caz contrar se numește model politic non-Tinbergen.

În modelul lui Hansen, numărul de instrumente este k = 2, iar numărul de scopuri este m = 2, deci modelul este de tip Tinbergen (Hansen, 1998). Deși în realitatea economică astfel de modele de tip Tinbergen sunt cazuri cu totul speciale, totuși faptul că numărul de instrumente este egal cu numărul de scopuri le conferă o serie de proprietăți utile, pe care le vom prezenta și analiza în continuare.

Modelul cu scopuri flexibile

În cele expuse anterior a fost ignorată următoarea problemă: Dacă nu există scopuri fixate, decidentul este capabil să proiecteze o politică? Acest lucru ar însemna, în mod sigur, că decidentul nu este capabil să proiecteze o politică prin care să atingă scopurile fixate respective; acest lucru nu înseamnă însă că el nu poate alege o altă politică sau o politică de compromis.

Acest aspect este, în general, cunoscut sub denumirea de *metoda scopurilor flexibile*, introdusă de către Tinbergen.

Presupunem, pentru un scop fixat dat, că modelul politic Mu = y nu este slab static controlabil. Aceasta poate apărea doar fiindcă $\bar{y}$ nu poate fi scris ca o combinație liniară de K instrumente, $\bar{y}=\sum_{i=1}^{K} u_i M_i$ pentru orice mulțime de ponderi sau politici, $u_1,...,u_K$. Intuitiv, există mai multe scopuri independente decât instrumente independente. Deci presupunem că $\rho[M]=K<N$. Atunci, pentru scopuri fixate arbitrar, există o deficiență de rang a instrumentelor:

$$\delta \equiv \rho[A]-\rho[B]=N-K \tag{13}$$

Implicația acestui fapt este că devine posibil să se atingă doar K dintre cele N scopuri fixate arbitrar, cu $\delta=N-K$ scopuri compromise. Și cu cât este mai mare această deficiență de rang, cu atât mai slabă este performanța sistemului în raport cu un obiectiv politic cu scopuri fixate.

Modele cu instrumente și scopuri flexibile

O defecțiune în existența scopurilor fixate dă naștere metodei de proiectare a scopurilor flexibile, în timp ce o defecțiune în existența instrumentelor și scopurilor fixate dă naștere metodei de rezolvare a problemelor cu scopuri și instrumente flexibile introdusa de Theil.

În continuare, vor fi prezentate aceste metode într-un context unificat al unui model cu scopuri flexibile – apărând din defecțiunea în existența scopului fixat.

Mai întâi, să observăm existența unui caz în care problema cu instrumente și scopuri flexibile este identică cu problema cu scopuri fixate. Aceasta apare când specificarea scopului fixat $x=\bar{x}$ și specificarea instrumentului fixat $u=u^*$ satisfac amândouă modelul politic:

$$Bu^* \equiv A\bar{x}-d \tag{14}$$

În acest caz, valorile fixate ale instrumentelor se întâmplă să coincidă cu acele valori necesare pentru a atinge valorile fixate ale scopurilor. Evident, totuși, că specificația $(\bar{x},u^*)$ este inconsistentă cu modelul politic. De exemplu, modelul politic redus $Mu=y$ este static controlabil cu $K=N$ și $\rho[M]=N$. Atunci:

(I) Pentru orice $\bar{y}$ există un unic $\bar{u}$ și

(II) Pentru orice u^*, există un unic y^*.

Odată $\bar{y}$ specificat, $\bar{u}$ este unic determinat și invers. Dar, presupunând că aceasta este adevărat, în modelul politic cu instrumente și scopuri fixate $\bar{y}$ și u^* sunt independente raportându-le la decident. Atunci doar accidental s-ar putea întâmpla ca o astfel de pereche $(\bar{y},u^*)$ să satisfacă modelul politic.

Problema cu scopuri flexibile

Dacă existența nu este asigurată în cazul *P.S.F.* de forma Pu=y, cele expuse anterior sugerează că poate, totuși, să fie formulată o problemă de optimizare care generează o politică de compromis de tipul „second best”.

Presupunem că preferințele sunt simetrice în raport cu scopurile dorite și, deci, există o funcție pătratică a pierderilor datorită abaterii de la scopurile stabilite. Se ajunge, astfel, la o problemă de optimizare pătratică cu restricții liniare generând politici liniare.

Avem astfel *problema cu scopuri flexibile (P.S.Fl.)* cu mai multe instrumente și mai multe scopuri, care poate fi formulată astfel:

$$\begin{aligned}&\min_u J(x-\bar{x},u-u^*)=(x-\bar{x})^T Q(x-\bar{x})+\\&+(u-u^*)^T R(u-u^*)\end{aligned} \tag{15}$$

$$Q\geq 0,\ R\geq 0$$

în *condițiile:*

$$Bu=Ax-d \tag{16}$$

Să discutăm câteva aspecte, așa cum rezultă ele din analiza *P.S.Fl.*

Mai întâi, pentru o specificare inconsistentă a unui scop fixat combinată cu neîndeplinirea unui criteriu de existență, nici scopurile individuale x_i, i = 1,..., m și nici instrumentele individuale u^*_i, i = 1,..., k nu pot fi determinate exact.

În al doilea rând, vectorul fixat al instrumentelor u^* corespunzător instrumentelor nerestricționate poate fi ales astfel încât să aibă valori arbitrare deoarece acestea sunt irelevante pentru analizarea soluției optimale.

În al treilea rând, matricele de ponderare Q și R exprimă preferințele decidenților politici în ce privește compromisul dintre scopurile fixate sau instrumentele fixate, în sensul (i) echilibrului dintre scopuri; și (ii) echilibrului dintre instrumente.

În plus, mărimile relative ale lui Q și R definesc importanța relativă a instrumentelor și scopurilor fixate. Desigur că în exemplul scalar al lui Holt apare doar cel de-al doilea echilibru, cele două cazuri manifestându-se natural doar în modelele politice multidimensionale (m >1, k > 1). Uneori, raportul specific dintre scopuri și instrumente poate fi introdus sub forma unui termen suplimentar $(x-\bar{x})^T S(u-u^*)$.

În al patrulea rând, matricile de ponderare sunt nenegativ definite de ipoteza conform căreia J(x - $\bar{x}$, u - u*) este o funcție de pierdere și simetrice, fără pierdere de generalitate.

În al cincilea rând, Q va fi, în general, pozitiv definit (Q > 0) deoarece toate cele m scopuri sunt privite ca scopuri independente; în același timp R va fi pozitiv definit doar dacă toate instrumentele au statut de scopuri și, deci, vor fi pozitiv semidefinite (R ≥ 0) în alte cazuri.

Condiția R ≥ 0 este doar un alt mod de a spune că unele instrumente sunt libere sau nu au costuri explicite atașate utilizării lor. Atunci, specificarea (Q > 0, R = 0) reprezintă problema cu scopuri flexibile și specificarea (Q > 0, R > 0) reprezintă cazul extrem în care toate instrumentele au statut de scopuri.

Se observă că P.S.Fl., ca și P.S.F., include specificarea a două expresii: una pentru restricția de model politic și alta pentru obiectivul politic.

Totuși, spre deosebire de P.S.F., P.S.Fl. include obiectivul politic nu sub forma unui set de restricții ecuaționale, ci printr-o ordonare a preferințelor privind rezultatele care pot fi atinse.

O comparare a acestei probleme cu formularea P.S.F. (Pu = y) nu arată similitudini care să sugereze faptul că rezultatele privind existența, unicitatea și proiectarea P.S.F. pot fi extinse și la P.S.Fl.

Cu toate acestea, în literatura s-a arătat că există o similitudine structurală substanțială între cele două probleme. Această similitudine va fi, la rândul său, deosebit de importantă în abordarea dinamică a politicilor macroeconomice.

P.S.Fl. este o problemă clasică de optimizare cu restricții, în care funcția de performanță este pătratica și restricția este liniară. De fapt, deoarece criteriul este convex și restricția este liniară, multe rezultate privind natura soluției sunt destul de accesibile. Astfel, se poate utiliza, pentru rezolvarea problemei respective, metoda multiplicatorilor Lagrange.

Definim Lagrangeanul:

$$\begin{aligned} L(x,u,\lambda) &\equiv (x-\bar{x})^T Q(x-\bar{x}) + \\ &+ (u-u^*)^T R(u-u^*) + \lambda T(Ax-d-Bu) \end{aligned} \tag{17}$$

Atunci condițiile de optim de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2Q(x-\bar{x}) + A^T\lambda = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 2R(u-u^*) - B^T\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Ax - d - Bu = 0 \tag{18}$$

Din prima relație și utilizând ipoteza $\rho[A] = N$, avem:

$$\begin{aligned} \lambda &= -2A^{-T}Q(x-\bar{x}) = -2A^{-T}Q(A^{-1}Bu + A^{-1}d - \bar{x}) = \\ &= -2A^{-T}QMu + 2A^{-T}Q\bar{y} \end{aligned} \tag{19}$$

unde $M \equiv A^{-1}B$ și $\bar{y} = \bar{x} - A^{-1}\bar{d}$.

Din cea de-a doua relație obținem imediat:

$$\begin{aligned} R(u-u^*) &= \frac{1}{2}B^T\lambda = -B^TA^{-T}QMu + B^TA^{-T}Q\bar{y} = \\ &= -M^TQMu + M^TQ\bar{y} \end{aligned} \tag{20}$$

Condițiile de ordinul întâi se pot scrie compact ca:

$$(M^TQM + R)u = Ru^* + M^TQ\bar{y} \tag{21}$$

Se observă că aceste condiții de ordinul întâi se mai scriu:

$$\phi u = c\,,\ u \in R^k\,,\ c \in R^k \tag{22}$$

unde:

$$\phi \equiv M^TQM + R;$$

$$c \equiv Ru^* + M^TQ\bar{y} = Ru^* + M^TQx - M^TQA^{-1}d\,.$$

Se pot analiza, în acest caz, proprietățile de existență și unicitate ale politicii optimale. De exemplu, pentru c dat (deci se dau preferințele Q și R, obiectivele $\bar{x}$, u^* și datele d) o politică optimală există dacă:

$$\rho[\phi : c] = \rho[\phi]$$

Dar ϕ și c sunt amândouă funcții de matricele de preferință Q și R, astfel că satisfacerea criteriului de rang de mai sus depinde de ipotezele făcute asupra acestor preferințe ($Q > 0$, $R > 0$) sau ($Q \geq 0, R = 0$)).

Să presupunem că $\phi \equiv M^TQM + R$ este singulară, în care caz condițiile de ordinul doi determină o soluție unică de forma:

$$\hat{u} = (M^TQM + R)^{-1}(Ru^* + M^TQ\bar{y}) \tag{23}$$

unde:

$$\bar{y} \equiv \bar{x} - A^{-1}d\,,\ M \equiv A^{-1}B\,.$$

Presupunând existența politicii optimale pentru o problemă cu scopuri flexibile, politică dată de relația (23), să dăm câteva dintre *proprietățile* acesteia.

Mai întâi, politica optimală, dată de relația de mai sus, este o *politică liniară,* exprimată ca o combinație liniară de vectorul dorit al scopurilor fixate $\bar{x}$, de vectorul dorit al instrumentelor fixate u^* și de vectorul variabilelor exogene necontrolabile d, cu ponderile depinzând de parametrii sistemului $M \equiv A^{-1}B$ și de parametrii preferințelor Q, R.

În al doilea rând, dacă nu există costuri ale instrumentelor ($R = 0$), atunci o politică optimală în cazul *scopurilor flexibile:*

$$\hat{u} = (M^TQM)^{-1}M^TQ\bar{y} \tag{24}$$

este obținută presupunând că $(M^TQM)^{-1}$ există.

În al treilea rând, în analogul multidimensional al modelului lui Holt, dacă teorema lui Tinbergen are loc în forma $\rho[B] = K = N$, atunci absența costurilor instrumentale ($R = 0$) și prezența *costurilor independente* pentru toate scopurile ($Q > 0$) generează soluția:

$$\hat{u} = M^{-1}\bar{y} \tag{25}$$

Pe de altă parte, prezența costurilor instrumentale implică în general imposibilitatea de a atinge scopurile fixate $\bar{y}$ chiar dacă modelul satisface teorema lui Tinbergen (controlabilitate statică strictă).

În al patrulea rând, dacă *nu există costuri ale scopurilor* ($Q \equiv 0$) – deci o problemă cu instrumente fixate pure – atunci politica optimală, presupunând că R^{-1} există, este de forma:

$$\hat{u} = u^* \tag{26}$$

Acesta este analogul multidimensional al rezultatului $G = G^*$ obținut în exemplul lui Holt. Deoarece decidentul politic este indiferent ($Q = 0$) la configurația rezultată a politicii, atunci politica optimală este chiar $\hat{u} = u^*$ (vectorul instrumentelor fixate dorit).

În al cincilea rând, dacă specificarea instrumentelor și scopurilor fixate este *consistentă* – ($\bar{x}$, $u^*\bar{d}$,) $\Rightarrow$ $Mu^* \equiv \bar{y}$, atunci politica optimală în acest caz este:

$$\hat{u} = (M^TQM + R)^{-1}(R + M^TQM)u^* = u^* \tag{27}$$

Atât scopul fixat, cât și instrumentul fixat sunt atinse simultan, altfel spus nu există deficiență de existență.

În al șaselea rând, un mod alternativ de a privi politica optimală, când costurile instrumentale sunt pozitiv definite ($R > 0$), este să se combine doar primele două condiții de ordinul întâi, scriind abaterea de la instrumentele fixate ($\hat{u}-u^*$) ca o funcție liniară de abaterea scopurilor fixate ($\hat{x}-\bar{x}$):

$$\begin{aligned} \hat{u} - u^* &= \frac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda = -R^{-1}B^TA^{-T}Q(\hat{x}-\bar{x}) = \\ &= -R^{-1}M^TQ(\hat{x}-\bar{x}) \end{aligned} \tag{28}$$

unde R^{-1} există prin ipoteză.

O astfel de regulă politică este ceea ce Holt şi Theil au numit *Regula Decizională Liniară (RDL).*

Modele dinamice de politică economică

Prin analogie cu problemele politice statice, problemele politice dinamice apar din interacţiunea dintre un obiectiv politic dinamic şi un model macroeconomic dinamic. În continuare, să prezentăm cadrul analitic necesar construirii unei teorii dinamice a politicilor macroeconomice şi, totodată, să dăm câteva tipuri de modele politice şi de obiective politice dinamice.

Ca şi în cazul static, în reprezentarea dinamică există o *formă structurală* şi o *formă redusă* a modelului politic. În cazul unei economii cu o structură deterministă şi liniară, alegerea între cele două reprezentări este convenţională; ca şi la problema statică, forma redusă este mai mult preferată.

Cu toate acestea, în cazul dinamic apare o anumită varietate datorată reprezentării liniare, cunoscută şi sub denumirea de *reprezentarea în spaţiul stărilor*, utilizată frecvent datorită avantajelor analitice pe care le are în raport cu celelalte tipuri de reprezentări.

Deşi o problemă politică dinamică poate fi reprezentată în modalităţi diferite (forma structurală, forma redusă, forma liniară ş.a.), varietatea acestor probleme nu se datorează acestor reprezentări, care sunt echivalente, ci modalităţilor de introducere a obiectivelor politice dinamice.

Ştim că există două clase mari de obiective: *obiective fixe* şi *obiective flexibile.* Varietatea de mai sus este introdusă de diferenţierea ce se poate face în cadrul clasei obiectivelor fixe. Acestea pot fi introduse sub forma obiectivelor „traiectorie" şi obiectivelor „staţionaritate".

Obiectivul-traiectorie cere ca anumite variabile ale modelului politic să urmeze traiectorii temporale date; *obiectivul staţionaritate* necesită ca aceste variabile să se apropie de starea staţionară a modelului politic, dar fără să prescrie anumite traiectorii care vor fi urmate.

Aceste două tipuri de obiective introduc două probleme distincte ale politicii macroeconomice dinamice.

O altă dihotomie ce poate fi introdusă este cea a reprezentării timpului ca o *variabilă discretă* sau o *variabilă continuă.* Deoarece în cadrul teoriei politicilor economice interesează, în primul rând, efectul instrumentelor asupra scopurilor, se poate aprecia că este mai util să se lucreze în cadrul discret decât cel continuu.

Acest lucru nu înseamnă, însă, faptul că abordarea continuă nu ar constitui un cadru potrivit sau că ar fi mai puţin validă. În principal, diferenţele dintre ele constau în detalii şi nu în esenţă.

Reprezentările problemei politice dinamice

Dacă fiecare dintre cele m ecuaţii ale modelului static în formă structurală

Ax = Bu + d

este înlocuită cu o ecuaţie dinamică, *forma structurală dinamică,* în cazul discret, este următoarea:

$$\hat{A}(L)x(t) = \hat{B}(L)u(t) + \hat{C}(L)w(t) \qquad (29)$$

cu $x \in R^m$, $u \in R^k$ şi $w \in R^j$ definiţi ca vectorul celor m scopuri endogene, vectorul celor k instrumente exogene şi, respectiv, vectorul celor j variabile necontrolabile exogene.

L este operatorul de întârziere, definit ca:

$$\hat{L}\,x(t) = x(t-v), \qquad v \in \{0,1,...\} \qquad (30)$$

şi $\hat{A}(L), \hat{B}(L), \hat{C}(L)$ sunt matrici polinomiale de dimensiuni m×m, m×k şi, respectiv, m×j date de:

$$\hat{A} \equiv \sum_{i=1}^{p} \hat{A}_i L^i\ ,\ \hat{B} \equiv \sum_{i=0}^{q} \hat{B}_i L^i\ ,\ \hat{C} \equiv \sum_{i=0}^{r} \hat{C}_i L^i \qquad (31)$$

cu $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i$ matrici constante de dimensiuni m×m, m×k şi, respectiv, m×j.

Parametrii p, q şi r definesc întârzierea maximă în timp a scopurilor, instrumentelor şi, respectiv, variabilelor necontrolabile din sistem.

Presupunând că variabilele necontrolabile exogene sunt perfect cunoscute, relaţia (29) mai poate fi scrisă:

$$\hat{A}(L)x(t) = \hat{B}(L)u(t) + \hat{d}(t) \qquad (32)$$

care, făcând abstracţie de L şi t, este asemănătoare cu relaţia statică Ax = Bu + d.

În forma structurală introdusă, fiecare scop x(t) este, în general, funcţie de:

(i) propriile sale valori întârziate;
(ii) valorile curente şi întârziate ale altor scopuri;
(iii) valorile curente şi întârziate ale instrumentelor;
(iv) valorile curente şi întârziate ale variabilelor exogene necontrolabile.

Această dependenţă apare mai explicită dacă scriem modelul structural (32) în formă analitică:

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{11}(L) & \Lambda & \hat{a}_{1m}(L) \\ M & M & M \\ \hat{a}_{m1}(L) & \Lambda & \hat{a}_{mm}(L) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(t) \\ M \\ x_m(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{b}_{11}(L) & \Lambda & \hat{b}_{1k}(L) \\ M & M & M \\ \hat{b}_{m1}(L) & \Lambda & \hat{b}_{mk}(L) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1(t) \\ M \\ u_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1(t) \\ M\,\vdots \\ d_m(t) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

Aici, elementele matricilor $\hat{A}(L)$ şi $\hat{B}(L)$ sunt polinoame de L, cu

$$p = \max\{grad\ \hat{a}_{ij}(L)\}\ ; \quad q = \max\{grad\ b_{ij}(L)\}$$

O reprezentare ce decurge din forma structurală este forma *redusă*. Caracteristica principală a formei reduse este aceea că valorile actuale ale variabilelor scop nu sunt dependente de alte valori anterioare ale scopurilor.

Astfel, pentru a obţine această formă redusă, modelul în forma structurală (32) se înmulţeşte la stânga cu inversa matricei scopurilor şi obţinem, procedând ca mai sus:

$$x(t) = A_1 x(t-1) + A_2 x(t-2) + B_0 u(t) + d(t)$$

sau, mai general

$$x(t) = A(L)x(t) + B(L)u(t) + d(t)$$

unde:

$$A(L) \equiv \sum_{i=1}^{p} A_i L^i \; ; \; A_i = \hat{A}_0^{-1} \hat{A}_i \; ; \; \rho\left[\hat{A}_0\right] = m \, ,$$

cu ρ reprezentând rangul matricei din paranteză și

$$B(L) \equiv A_0^{-1}\hat{B}(L) \; ; \; d(t) \equiv A_0^{-1}\hat{d}(t)$$

Modelele dinamice în forma structurală și în forma standard sunt legate de componentele lor statice. Astfel, când *forma structurală dinamică(S_d)* este scrisă ca

$$\hat{B}(L)u(t) = \hat{A}_0 \, x(t) - \left[\hat{d}(t) + \hat{A}_0 \, A(L)x(t)\right] \tag{34}$$

iar *forma dinamică redusă(R_d)* ca

$$\hat{A}_0^{-1} \hat{B}(L)u(t) = x(t) - \left[\hat{A}_0^{-1} \hat{d}(t) + A(L)x(t)\right] \tag{35}$$

Asemănarea cu *forma structurală statică*

$$Bu = Ax - d$$

respectiv cu *forma statică redusă*

$$A^{-1}Bu = x - A^{-1}d$$

este evidentă.

Care dintre cele două reprezentări va fi utilizată depinde acum de tipul de problemă politică tratat.

Pentru analiza politicii macroeconomice în cadrul structurii economice fixate – problema politică cantitativă de tip Tinbergen – modelele politice dinamice în formă redusă reprezintă cea mai convenabilă modalitate de utilizare.

Obiective dinamice

Introducerea timpului în modelele politice dinamice determină creșterea numărului gradelor de libertate în raport cu modelele statice.

În particular, considerând vectorul scopurilor fixate ca o configurație dorită a scopurilor individuale, vor apărea trei tipuri alternative de obiective politice dinamice, și anume: obiective cu scopuri punctuale; obiective staționare; obiective cu scopuri traiectorie.

Obiectivele cu scopuri punctuale sunt, pur și simplu, obiectivele statice reformulate dinamic: problema politică constă în atingerea unui anumit punct dorit în spațiul scopurilor.

Acest obiectiv, foarte limitat de atfel, de a atinge o anumită configurație a lui x(t), pare că nu este legat de comportamentul anterior sau ulterior raportat la scopuri. Un guvern, de exemplu, pornind de la cunoașterea datei alegerilor, poate stabili un nivel dorit al șomajului și ratei inflației pentru perioada premergătoare alegerilor.

În anumite cazuri, nu va fi suficient să se stabilească doar un punct în spațiul scopurilor; decidentul politic va putea dori, de asemenea, să mențină acel punct sau să rămână într-o vecinătate a lui o anumită perioadă de timp.

Obiectivele de staționaritate presupun atingerea și menținerea unui punct-scop dorit în ipoteza că acest punct, odată atins, trebuie păstrat în continuare prin utilizarea unor instrumente statice. În acest caz, punctul-scop respectiv poate fi un punct de echilibru sau de staționaritate al sistemului economic dinamic.

Obiectivul de staționaritate stă la baza ideii reprezentării modelului politic dinamic în raport cu abaterile de la poziția de echilibru specifică acestuia. În funcție de o astfel de reprezentare, obiectivul de staționaritate este să se forțeze o soluție politic controlată a modelului pentru a ajunge la origine într-un timp finit.

Obiectivul de staționaritate modifică, deci, obiectivul scop punctual cerând ca toată mișcarea în modelul politic să înceteze după atingerea punctului dorit în timpul definit; obiectivul formulat astfel ignoră complet comportamentul sistemului după acel punct dat în timp.

Problemele cu obiectiv de staționaritate sunt o generalizare a problemelor Tinbergen statice, ele încorporând direct problema politică statică într-un context dinamic, ajustarea dinamică la obiectivul static fiind impusă și explicit formulată prin posibilele mișcări dinamice către acea poziție de staționaritate. În condițiile unor modele cu astfel de obiective, punctul-scop fixat este, ca și în teoria statică, încă în centrul modelului, dar, în plus, este inclusă și dinamica ajustării sistemului către acest punct.

Obiectivele sub formă de traiectorii modifică obiectivul de staționaritate în două etape. Mai întâi, restricția privind utilizarea nondinamică a instrumentelor politice, odată ce scopul punctual dorit a fost atins, este relaxată; în esență, aceasta implică faptul că punctul-scop dorit nu este necesar să fie mult timp un punct de staționaritate al modelului politic dinamic.

Prin această relaxare, obiectivul staționaritate constă, acum, în atingerea și menținerea unui anumit punct în spațiul scopurilor fără restricții asupra variației instrumentelor.

În a doua etapă, deoarece punctul-scop nu este, în mod necesar, mult timp un punct de staționaritate al modelului politic dinamic și nu are, datorită acestui fapt, semnificație conceptuală specială, obiectivul atingerii unei traiectorii admite orice secvență de obiective punctuale arbitrare – nu doar secvența reprezentând replicarea succesivă a scopurilor. Echivalent, obiectivul traiectorie poate fi definit ca o secvență de obiective arbitrare punctuale.

Nu se poate spune că există o legătură prea strânsă între obiectivele-traiectorii și obiectivele-staționaritate. Amândouă conduc la probleme politice dinamice cu existență separată.

Atingerea unui obiectiv dinamic, de orice tip ar fi el, poate depinde de gradul în care decizia politică anticipează acest obiectiv. De regulă, este mai costisitor să se atingă un obiectiv politic imediat decât într-un moment de timp viitor. În primul caz, nu sunt posibile anticipații politice; dar pe masură ce orizontul de timp se extinde în viitor, gradul de anticipație politică crește corespunzător și, odată cu acesta, și opțiunile sau resursele disponibile pentru atingerea obiectivului respectiv.

Gradul de anticipație este un parametru specific abordării dinamice, el fiind un concept cheie în teoria dinamică a politicilor macroeconomice. Raportul dintre gradul de anticipație și problema politică dinamică poate fi ilustrat ca în figura1.

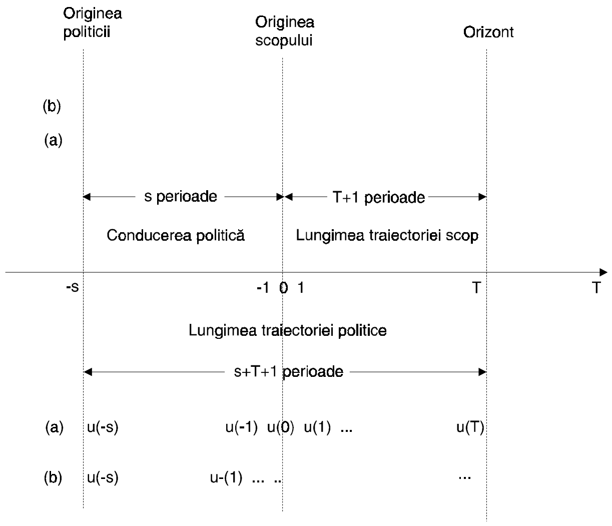

Figura 1

Astfel, definim obiectivul cu scop punctual ca: $x(\bar{t})=\bar{x}(\bar{t})$, $\bar{t}\in\{0,1,...\}$ unde $\bar{x}(\bar{t})$ este o configurație dorită $\bar{x}$ de m scopuri la un moment dat de timp $\bar{t}$.

Apoi, putem defini obiectivul de tip traiectorie ca o secvență de obiective punctuale pe un orizont de timp dat.

Arbitrar, dar convenabil, normalizând originea acestei secvențe la zero, obiectivul traiectorie poate fi formal definit ca un vector de obiective punctuale:

$$\bar{X}_T=\{\bar{x}(0),\bar{x}(1),...,\bar{x}(T)\},\ T\in(0,1,...)$$

Parametrul T va fi denumit, în continuare, *interval scop* și determină lungimea traiectoriei scop (T+1 perioade), altfel spus, numărul de perioade consecutive pentru care configurațiile scop dorite sunt specificate. Când T=0, obiectivul traiectorie se transformă în obiectiv punctual.

Acum, să considerăm obiectivul politic (a) și secvența de politici (a) din figura 1. Aceasta poate fi scrisă ca depinzând de doi parametri

$$U(s,T)=\{u(-s),...,u(0),...u(T)\},\ s\in(0,1...)$$

T a fost definit mai sus, în timp ce parametrul s măsoară numărul de perioade cu care acțiunea politică inițială u(-s) anticipează sau conduce la punctul inițial $\bar{x}(0)$ al traiectoriei scop. Parametrul s se numește *originea politicii*.

Lungimea traiectoriei politice U(s,T) sau intervalul politic se definește ca sumă dintre originea politicii (s perioade) și lungimea traiectoriei scop (T+1) perioade. Deci intervalul politic este (s+T+1) perioade și depinde, evident, de doi parametri s și T.

Obiectivul staționaritate se poate defini, în acest cadru, ca un obiectiv traiectorie modificat în care se dorește să se atingă și să se păstreze un scop punctual $\bar{x}$ reprezentat în figura 1 de cazul (b), dar ca o secvență:

$$U(s,T)=\{u(-s),...,u(0),...u(T)\},\ s\in(0,1...)$$

Se observă că instrumentele variază dinamic doar înainte de atingerea scopului punctual $\bar{x}$.

Mai corect, obiectivul staționaritate relativ la originea zero a politicii este definit ca:

$$x(k)=\bar{x},\ u(k)=\bar{u},\ k=s+1,...T$$

unde:

$$\hat{A}(1)\bar{x}\equiv\hat{B}(1)\bar{u}+\hat{d}$$

Deci perechea scop/instrument $(\bar{x},\bar{u})$ este un punct staționar al modelului politic dinamic pe care acesta o atinge și o menține un timp finit.

Cei doi parametri specifici – s și T – afectează în diferite moduri toate cele trei obiective politice dinamice.

În practică, gradul de anticipare politică va fi determinat de diferiți factori. Un determinant major va fi *structura modelului politic* însuși.

Un al doilea determinant va fi *urgența* atașată *obiectivului politic;* cu cât decidentul apreciază că anumite obiective sunt mai urgente cu atât va fi gradul de anticipație mai mic.

Al treilea determinant este măsura în care decidentul politic este pregătit să facă un *compromis* în *atingerea obiectivului politic*. Poate fi, de exemplu, posibil să se atingă un obiectiv precis doar dacă gradul de anticipație este mare. Pierderea de anticipație este, atunci, aproximativ egală cu compromisul dintre atingerea obiectivului în favoarea ajungerii mai repede în vecinătatea acelui obiectiv.

Similar, în ceea ce privește cel de-al doilea parametru dinamic T, diferiți factori vor acționa în determinarea valorii acestuia. Cel mai simplu caz este când T=0, deci avem un obiectiv punctual. Alegerea unui T=∞ nu este exclusă în anumite modele politice cu orizont infinit.

Bibliografie

Allen, R.G.D. (2002). *Macroeconomic Theory: A Mathematical Treatment*, Macmillan, London

Benassy, J.P. (2003). *Macroeconomics: An Introduction to the Non-Walrasian* Approach, Academic Press, New York

Chiriță, Nora (2003). *Modelarea dinamică a tranziției. Restricția de timp*, Editura Economică, București

Chiriță, Nora (2004). *Politici și strategii ale tranziției. Analiza modelelor,* Editura Economică, București

Dăianu, D. (1992). *Funcționarea Economiei și Echilibrul Pieței*, Editura Academiei Române, București

Dernburg, T.F., Dernburg, J.D. (1999). *Macroeconomic Analysis: An Introduction to Comparative Statics and Dynamics*, Addison-Wesley, New York

Hall, E.R., Taylor, B.J. (1988). *Macroeconomics. Theory, Performance and Policy*, Wiley, New York

Hansen, B. (1998). *The Economic Theory of Fiscal Policy*, 3rd edition Allen & Urwin, London

Hendry, D.F. (1995). *Dynamic Econometrics*, Oxford University Press, Oxford

Picard, P. (1986). *Theorie du Desequilibre et Politique Economique*, Economica, Paris

Pikulakis, E.(1996). *International Macroeconomics*, Blackwell, London

Preston, A.J., Pagan, A.R. (2002). *The Theory of Economic Policy: Statics and Dynamics*, 2nd edition Cambridge University Press, Cambridge

Scarlat, E., Chiriță, Nora (2004). *Sisteme cibernetice ale economiei de piață*, Editura Economică, București

Theil, H. (1994). *Optimal Decision Rules for Government and Industry*, 3rd edition, North Holland, Amsterdam

Tinbergen, J. (1996). *Economic Policy, Principles and Design*, 2nd edition, North Holland, Amsterdam