Un model sistemic de reglare optimală a serviciului public

▪

Ani Matei
Profesor universitar doctor
Lucica Matei
Profesor universitar doctor
Școala Națională de Studii Politice și Administrative

Abstract. *The current paper inscribes within those approaching the issue of public services from the interdisciplinary perspective. Public service development and imposing standards of efficiency and effectiveness, as well as for citizens' satisfaction bring in front line the systemic modelling and establishing optimal policies for organisation and functioning of public services. The issue under discussion imposes an interface with powerful determinations of social nature. Consequently, the most adequate modelling might be that with a probabilistic and statistic nature. The fundamental idea of this paper, that obviously can be broadly developed, starts with assimilating the way of organisation and functioning of a public service with a waiting thread, to which some hypotheses are associated concerning the order of provision, performance measurement through costs or waiting time in the system etc. We emphasise the openness and dynamics of the public service system, as well as modelling by turning into account the statistic knowledge and researches, and we do not make detailed remarks on the cybernetic characteristics of this system. The optimal adjustment is achieved through analysis on the feedback and its comparison with the current standards or good practices.*

Key words: public service; systemic modelling; performance; optimisation.

▪

Serviciile publice pot fi modelate ca niște sisteme dinamice complexe, cu o arhitectură mixtă care include și o a treia buclă feedback, datorată politicilor publice. Totodată, perspectiva abordării sistemice a serviciilor publice ne conduce la considerarea acestora ca subsisteme ale administrației publice ale căror obiective, cuantificate în ieșirile sistemului, se definesc în raport cu satisfacerea unor nevoi sociale, nevoi determinate pe baza interesului public.

Multe dintre serviciile publice au caracter administrativ, datorat faptului că acestea sunt organizate de colectivitățile publice teritoriale după regulile obișnuite ale administrației publice.

Caracterul propriu-zis administrativ se atenuează în cadrul serviciilor publice care acționează în domeniul economic, situație în care se caută să se apropie, pe cât posibil, de procedeele de gestiune ale instituțiilor private (Matei, 2004, pp. 120-130).

Încercări privind modelarea sistemică a serviciilor publice au mai fost prezentate în literatura românească (Matei, 2003a, pp. 203-296; Matei, 2003b, pp. 251-262) și au la bază următoarele caracteristici:

- utilizează modelarea probabilistică a faptelor administrativ-sociale sau economice specifice funcționării serviciilor publice;
- sunt definite și evidențiate caracteristicile cibernetice ale sistemului serviciului public;
- realizează fundamentarea sistemică a deciziei publice în cadrul serviciului public, oferind criteriile și metodele de optimizare a acestora;
- utilizează și modelări care vizează nivelurile de aspirație ale consumatorilor la a căror determinare sunt utilizate metode specifice științelor conexe teoriei generale a sistemelor.

Ideea generală după care se realizează modelarea şi optimizarea deciziei publice face apel la teorii cunoscute în matematicile economice referitoare la modelele de aşteptare.

În esenţă, orice sistem al unui serviciu public este un sistem de aşteptare în care fiecare consumator beneficiază de serviciul solicitat după anumite reguli şi într-o anumită ordine.

1. Echilibrul dinamic

Cea mai mare parte a sistemelor de aşteptare se caracterizează printr-o mare variabilitate a ratei intrărilor în sistem şi a realizării serviciului public pentru consumator.

Ca urmare, reglarea, în vederea obţinerii echilibrului, în cadrul unui sistem al serviciului public realizează o optimizare a raportului cerere-ofertă pentru serviciul public respectiv.

Având în vedere variabilitatea cererilor, sub raport cantitativ şi calitativ, reglarea în cadrul serviciilor publice impune studierea unor fenomene şi interacţiuni sociale ce se înscriu în sfera economiei publice, cunoscute sub denumirea de *fenomene de aşteptare*. Modelul acestor fenomene poate fi reprezentat logic printr-un *fir de aşteptare* şi poate fi semnalat ori de câte ori „cererea de servicii depăşeşte capacitatea curentă de a asigura serviciile cerute“ (Matei, 2003, p. 173).

Apariţia firelor de aşteptare are, uneori, şi o determinare temporală, datorată variabilităţii cererii şi care, pentru anumite perioade de timp, supraîncarcă sistemul, iar, pentru alte perioade, îl subîncarcă.

Feedback-ul activităţilor în cadrul unui serviciu public, în condiţiile acceptării variabilităţii cererii, trebuie să ofere informaţii pentru luarea deciziilor optime asupra capacităţii serviciului public.

Deşi sunt aspecte specifice pentru serviciile publice care influenţează costurile serviciului respectiv în modelul prezentat, aspectele topologice ale serviciului public nu vor fi luate în considerare.

Elementele de bază ale *modelului sistemic al serviciului public* vor fi:

▪ *Intrările* reprezentate de consumatorii potenţiali. Caracteristica acestui element este *mărimea,* care poate fi finită sau infinită. Pentru serviciile publice mărimea intrărilor poate fi considerată infinită, chiar dacă, în realitate, este finită, dar suficient de mare. În legătură cu acestea vom face următoarele ipoteze (Bădin, Firică, 1995, p. 6):

– Probabilitatea de intrare în sistem a unui potenţial consumator, la un moment dat, este constantă şi nu depinde de ceea ce s-a întâmplat anterior;
– Probabilitatea de intrare într-un interval foarte mic de timp, (t, t + h), este proporţională cu lungimea h a intervalului considerat, deci va fi egală cu:

$$\lambda h + o(h),\ \ \lambda = \text{const.} > 0 \qquad (1.1)$$

unde, o (h) este o funcţie cu proprietăţile:

$$\lim_{h\to 0} o(h) = 0,\quad \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0 \qquad (1.2)$$

– Probabilitatea ca în intervalul de timp (t, t + h) să existe mai mult decât o intrare în sistem este aproape nulă, adică egală o1(h) care îndeplineşte condiţiile (1.2).

În aceste condiţii, intrările în sistem vor fi modelate de o variabilă aleatoare X a cărei lege de repartiţie este chiar *repartiţia Poisson* (Jaba, 1998, pp. 220-223). Ca urmare, probabilitatea ca în intervalul de timp (o, t), t > o să aibă loc n intrări în sistem va fi:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},\ \lambda > 0,\ n \in N \qquad (1.3)$$

deci în unitatea de timp (t = 1) avem:

$$P_n(1) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad (1.4)$$

▪ *Ieşirile* sunt reprezentate de persoanele care au beneficiat de serviciul solicitat. Şi pentru ieşiri pot fi formulate ipoteze asemănătoare ca pentru intrări. Prin urmare, ieşirile vor fi modelate printr-o variabilă aleatoare Y, care are legea de repartiţie, *legea Poisson*, cu parametrul m.

Un rezultat cunoscut în literatura de specialitate se referă la faptul că, dacă T este variabila aleatoare care reprezintă timpul scurs între două intrări succesive, atunci T este o variabilă aleatoare continuă a cărei lege de repartiţie este de tip *exponenţial,* cu parametrul l. Prin urmare, densitatea de repartiţie a lui T va fi:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{dacă } t \geq 0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

iar funcţia de repartiţie va fi:

$$F_T(t) = 1 - e^{-lt} \qquad (1.6)$$

a cărei medie va fi:

$$M(T) = \frac{1}{\lambda} \qquad (1.7)$$

iar dispersia:

$$D^2(T) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (1.8)$$

Analog, variabila aleatoare U, reprezentând timpul scurs între două ieşiri consecutive, va avea o repartiţie exponenţială cu parametrul m.

▪ *Ecuaţiile de stare* vor modela o succesiune de stări: $E_o, E_1, ..., E_n, ...$ care constituie traiectoria sistemului.

Fiecărei stări îi asociem probabilitatea P_n (t), care va fi reprezentată de o funcţie continuă şi derivabilă şi care verifică:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1 \qquad (1.9)$$

iar presupunând că la momentul t = 0 sistemul este vid, vom avea:

$$P_n(0)=\begin{cases}1 \text{ dacă } n=0\\ 0 \text{ dacă } n\neq 0\end{cases} \qquad (1.10)$$

Determinarea probabilităților $P_n(t)$, $n\in N$ este esențială pentru estimarea comportamentelor și parametrilor de performanță ai sistemului.

Pentru aceasta vom deduce un sistem de ecuații numit *sistemul ecuațiilor de stare.*

Dacă presupunem cunoscute:

▪ probabilitatea de trecere de la starea E_n la starea E_{n+1} în intervalul (t, t + h) este:

$$\lambda_n h + o(h) \qquad (1.11)$$

și corespunde unei noi intrări în sistem.

Ca urmare, probabilitatea de a rămâne în starea E_n, deci de a nu avea nicio intrare, va fi:

$$1 - [\lambda_n h + o(h)] \qquad (1.12)$$

▪ probabilitatea de trecere de la starea E_n la starea E_{n-1}, în intervalul de timp (t, t + h), este:

$$\mu_n h + o(h) \qquad (1.13)$$

și corespunde unei ieșiri din sistem. Probabilitatea de a rămâne în starea E_n, deci de a nu avea nici o ieșire, va fi:

$$1 - [\mu_n h + o(h)] \qquad (1.14)$$

▪ probabilitatea de trecere din starea E_n într-o stare E_{n-k} sau E_{n+k}, $k\in N$, $k > 1$ este o (h). Deci, într-un interval foarte scurt de timp, pot avea loc cel mult o intrare și cel mult o ieșire, atunci ecuațiile de stare ale sistemului serviciului public vor fi:

$$\begin{cases}P_o'(t)=-\lambda_o P_o(t)+\mu_1 P_1(t)\\ P_n'(t)=-\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)\end{cases} \qquad (1.15)$$

care reprezintă un sistem liniar infinit de ecuații diferențiale rezolvabil în condițiile inițiale (1.9) și (1.10).

Un caz particular, mai simplu de rezolvat, îl reprezintă cazul staționar, când probabilitățile sunt constante.

În acest caz din (1.15) obținem:

$$p_n=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}p_o \qquad (1.16)$$

$$p_o=\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\right)^{-1} \qquad (1.17)$$

Presupunând că, pentru orice stare a sistemului, rata medie a intrărilor este egală cu rata medie a ieșirilor, ecuația care exprimă acest principiu va fi *ecuația de echilibru* a stării n. Astfel, pentru n = 0, ecuația de echilibru va fi:

$$\mu_1 p_1=\lambda_o p_o \qquad (1.18)$$

iar pentru $n\neq 0$, ecuația de echilibru va fi:

$$\lambda_{n-1}p_{n-1}+\mu_{n+1}p_{n+1}=\lambda_n\,\mu_n p_n \qquad (1.19)$$

2. Performanțele serviciului public

Performanțele serviciului public sunt măsurate utilizând diverși indicatori și reprezintă gradul maxim de satisfacție ce poate fi oferit consumatorului, precum și gradul de utilizare a capacității serviciului public.

Acesta vor avea în vedere timpul de așteptare, ordinea de servire, intensitatea de trafic sau factorul de utilizare a capacității de servire.

Pentru cuantificarea acestora vom introduce noi relații de bază, exprimate prin variabile aleatoare, discrete sau continue și caracteristici ale acestora.

Astfel, vom considera că un consumator se află în sistem din momentul în care acesta a solicitat un serviciu până în momentul în care poate beneficia de acesta.

În acest context, dacă n este variabila aleatoare *număr de clienți aflați în sistem* repartiția acestuia va fi:

$$n:\begin{pmatrix}0 & 1\ldots & k\ldots\\ p_o & p_1\ldots & p_k\ldots\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

a cărei valoare medie

$$\bar{n}=\sum_{k=1}^{\infty}k\,p_k \qquad (2.2)$$

Dacă n_f = variabila aleatoare *numărul de clienți aflați în firul de așteptare,* atunci:

$$n_f:\begin{pmatrix}0 & 1\ldots & k\ldots\\ \sum_{i=0}^{s}p_i & p_{s+1}\ldots & p_{s+k}\ldots\end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

iar valoarea medie:

$$\bar{n}_f=\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n \qquad (2.4)$$

s reprezentând numărul de puncte (stații) în care un potențial consumator poate beneficia de serviciul dorit.

O altă mărime ce poate fi introdusă o reprezintă *numărul clienților în curs de servire,* care va fi reprezentată tot de o variabilă discretă, n_s, cu repartiția:

$$n_s:\begin{pmatrix}0 & 1\ldots & s\ldots\\ p_o & p_1\ldots & \sum_{n=s}^{\infty}p_n\end{pmatrix} \qquad (2.5)$$

și valoarea medie:

$$\bar{n}_s=\sum_{k=0}^{s-1}kp_k+s\sum_{n=s}^{\infty}p_n \qquad (2.6)$$

evident că:

$$n = n_f + n_s \qquad (2.7)$$

și

$$\bar{n} = \bar{n}_f + \bar{n}_s \qquad (2.8)$$

În mod analog, variabila aleatoare L, *numărul de stații libere,* va fi definită astfel:

$$L : \begin{pmatrix} 0 & 1\ldots & s\ldots \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k & p_{s-1}\ldots & p_o\ldots \end{pmatrix} \qquad (2.9)$$

cu valoarea medie:

$$\bar{L} = \sum_{k=o}^{s} k p_{s-k} \qquad (2.10)$$

observăm că:

$$\bar{n}_s = s - L \qquad (2.11)$$

Se mai poate introduce variabila aleatoare t, reprezentând *timpul de așteptare al unui client în sistem* pentru care s-a demonstrat că valoarea medie este:

$$\bar{t} = \bar{n} / \lambda \qquad (2.12)$$

O altă măsură a performanței sistemului este *factorul de serviciu* sau intensitatea de trafic, definit astfel:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.13)$$

precum și *factorul de utilizare* a capacității serviciului public:

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} \qquad (2.14)$$

care reprezintă procentul de timp cât serviciul public funcționează la capacitate maximă.

Literatura de specialitate relevă mai multe tipuri de modele adaptabile sistemelor serviciilor publice. Cel mai relevant dintre acestea este modelul sistemic cu s stații de servire identice și populație infinită. În aceste condiții:

$$\lambda_n = \lambda, \ \ n \in N \qquad (2.15)$$

și

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{dacă } 0 < n \le s \\ s\mu & \text{dacă } n > s \end{cases} \qquad (2.16)$$

iar

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{p^n}{n!} p_o & \text{dacă } 1 \le n \le s \\ \dfrac{p^n}{s! s^{n-s}} p_o & \text{dacă } n > s \end{cases} \qquad (2.17)$$

de unde:

$$p_{s+k} = \rho^* p_s, \ k \ge 1 \qquad (2.18)$$

va rezulta și expresia lui p_o

$$p_o = \left(1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^n}{s!\, s^{n-s}} \right)^{-1} \qquad (2.19)$$

care, în condițiile $\rho^* < 1$, va fi:

$$p_o = \left(1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^{s+1}}{s!\, (s-\rho)} \right) \qquad (2.20)$$

Dacă $\rho^* \ge 1$, atunci serviciul public se supraaglomerează și, teoretic, nu mai poate fi analizat după modelul prezentat în această abordare.

Obținem, de asemenea:

$$\bar{n}_f = \frac{-\rho^{s+1}}{(s-1)(s-p)^2} p_o \qquad (2.21)$$

$$\bar{n}_s = \rho$$

Interesante pentru determinarea feedback-ului și traducerea acestuia în informații utile pentru determinarea performanțelor serviciului public și eventuala reproiectare a sa sunt comparațiile diverselor mărimi caracteristice obținute cu unele valori de referință. De exemplu, se poate calcula probabilitatea ca un posibil consumator să aștepte mai mult decât un interval de timp standard t_o:

$$P\,(t > t_o) = \rho_s \frac{1}{1-\rho^*} e^{-(s\mu - \lambda)to} \qquad (2.22)$$

3. Optimizarea în serviciile publice

Din punctul de vedere al serviciului public, feedback-ul fundamentează și determină deciziile care privesc îmbunătățirea performanțelor sistemului existent sau proiectarea unui nou sistem cu parametrii doriți.

Astfel de parametri pot fi: rata de serviciu, μ, numărul stațiilor de servire, s, numărul consumatorilor potențiali care au acces în sistem.

„Optimizarea parametrilor poate fi privită din mai multe puncte de vedere, conform cu obiectivul decidentului. Un mod obișnuit de tratare este acela de a construi un *model de decizie cu costuri* care să minimizeze suma costurilor asociate așteptării și a costurilor asociate servirii, pe unitatea de timp.

Cu cât primul cost este mai mare, cu atât al doilea este mai mic și reciproc. Modelele de optimizare cu costuri sunt foarte eficiente dacă se pot deduce efectiv costurile unitare componente.

Când acest lucru este greu de făcut și nici estimările nu sunt suficient de bune, este obligatoriu să se caute un alt criteriu de optimizare” (Bădin, Despa, 1998, p. 143).

3.1. Etape ale optimizării serviciilor publice utilizând costurile

În general, modelele utilizate pentru modelarea sistemică a serviciului public reprezintă instrumente de analiză utilizate în vederea creșterii performanțelor acestora.

În multe situații putem introduce costuri și, astfel, să oferim posibilitatea determinării unui model de optimizare a activității în cadrul serviciului public menit să ridice nivelul de satisfacere a preferințelor consumatorului.

Pentru operaționalizarea unui astfel de model trebuie să parcurgem următoarele etape:

- definirea variabilelor în vederea descrierii problemei;
- deducerea repartițiilor probabilistice asociate bazate pe datele reale și utilizarea unor teste corespunzătoare;
- construirea funcției cost asociate sistemului utilizând costurile de așteptare;
- deducerea soluției optime din model și testarea valabilității acesteia în practică.

În acest context vom considera că c_1 reprezintă costul creșterii cu o unitate a ratei de serviciu, m, pe unitatea de timp, iar c_2 costul așteptărilor pe unitatea de timp pentru client.

3.2. Criterii de optimizare utilizând costurile

a) Rata optimă de servire determină intervalul optim în care poate fi servit un client.

Cu semnificațiile atribuite anterior variabilelor modelului, funcția obiectiv ce urmează a fi minimizată va fi:

$$\Gamma(\mu) = c_1\mu + c_2\bar{n}(\mu) \tag{3.1}$$

sau

$$\Gamma(\mu) = c_1\mu + c_2\frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{3.2}$$

Utilizând tehnici simple de optimizare, în situația în care $\lambda < \mu$ obținem:

$$\mu_{opt} = \lambda + \sqrt{\frac{c_2 \times \lambda}{c_1}} > \lambda \tag{3.3}$$

Această expresie arată că rata optimă nu depinde numai de costurile c_1 și c_2, ci și de parametrul intrărilor în sistem.

b) Numărul optim de stații de servire presupune determinarea numărului de stații de servire astfel încât să se utilizeze la maximum capacitatea serviciului public, iar timpul de servire să fie minim.

Astfel, dacă c_1 reprezintă costul adăugării unei stații, pe unitatea de timp, iar c_2 costul așteptării pe unitatea de timp, pentru un client, s fiind variabila de decizie care semnifică numărul de stații de servire, atunci funcția obiectiv va fi:

$$\Gamma(s) = c_1 s + c_2\bar{n}(s) \tag{3.4}$$

$\bar{n}(s)$ reprezentând numărul mediu de unități în sistem, atunci când acesta are exact s stații de servire.

Variabila s fiind o variabilă discretă, metoda de optimizare va utiliza o metodă combinatorială bazată pe observația că numărul mediu de unități în sistem, $\bar{n}(s)$, este o funcție descrescătoare.

Presupunând că s_{opt} reprezintă numărul optim de stații, vor trebui îndeplinite simultan condițiile:

$$\begin{aligned} &\Gamma(s_{opt}) \le \Gamma(s_{opt}-1)\\ &\Gamma(s_{opt}) \le \Gamma(s_{opt}+1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

adică:

$$\begin{aligned} &c_1 s_{opt} + c_2\bar{n}(s_{opt}) \le c_1(s_{opt}-1) + c_2\bar{n}(s_{opt}-1)\\ &c_1 s_{opt} + c_2\bar{n}(s_{opt}) \le c_1(s_{opt}+1) + c_2\bar{n}(s_{opt}+1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

care devine echivalent cu:

$$\bar{n}(s_{opt}) - \bar{n}(s_{opt}+1) \le \frac{c_1}{c_2} \le \bar{n}(s_{opt}-1) - \bar{n}(s_{opt}) \tag{3.7}$$

În concluzie, raportul $\frac{c_1}{c_2}$ indică numărul optim de stații de servire care ar trebui introduse astfel încât funcția cost $\Gamma(s)$ să fie minimă.

3.3. Modelul nivelurilor de aspirație

În această situație optimalitatea este privită în sensul satisfacerii anumitor *niveluri de aspirație* stabilite de decident. Aceste niveluri sunt definite ca limite superioare stabilite pentru valorile măsurilor conflictuale ale performanței sistemului, pe care autoritatea publică dorește să-l echilibreze.

Introducerea acestui model are în vedere dificultatea de a determina cu precizie costurile cerute în modelul de optimizare.

Din punctul de vedere al clientului, cele mai relevante mărimi pentru determinarea performanței sistemului sunt:

- $\bar{t}$, timpul mediu de așteptare în sistem;
- procentajul de stații care nu funcționează, X.

Pentru fiecare dintre cele două mărimi, autoritatea publică, pe baza nivelurilor de aspirație, stabilește limitele superioare α pentru t și β pentru X. Deci problema de optimizare se formulează astfel: să se determine numărul de stații, s_{opt}, astfel încât:

$$\bar{t} < \alpha, X < \beta \tag{3.8}$$

expresia lui $\bar{t}$ este cunoscută din (2.12), iar X se definește astfel:

$$\begin{aligned} X &= \frac{100}{s}\sum_{n=0}^{s}(s-n)p_n = \frac{100}{s}\bar{L} = \\ &= \frac{100}{s}(s-\bar{n}_s) = \frac{100}{s}\left(1-\frac{\rho}{s}\right)\% \end{aligned} \tag{3.9}$$

Grafic, acest model se poate reprezenta pe un sistem de axe ca în figura 1.

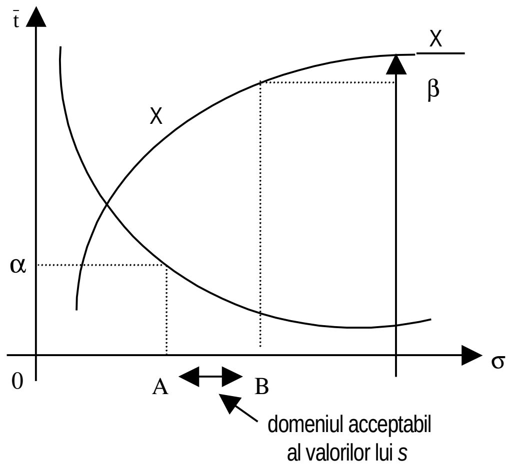

Figura 1. *Modelul nivelurilor de aspirație*

Observăm că în figura 1 cele două condiții (3.8) sunt simultan îndeplinite. În caz contrar (Bădin, Despa, 1998, p. 150) este necesar să se relaxeze una sau amândouă din cele două condiții pentru a determina s_{opt}.

Modelul nivelurilor de aspirație poate fi folosit și pentru deducerea costului, c_2, de așteptare a clientului pe unitatea de timp dacă se cunosc: costul c_1, nivelurile de aspirație α și β și numărul *s* al stațiilor de servire.

Astfel, utilizând (3.7) vom avea:

$$\frac{c_1}{\bar{n}(s-1)-\bar{n}(s)} \le c_2 \le \frac{c_1}{\bar{n}(s)-\bar{n}(s+1)} \qquad (3.10)$$

relația ce precizează un anumit interval pentru c_2, dacă numărul de stații de servire este ales conform nivelelor de aspirație α și β.

Bibliografie

Matei, Lucica. (2004). *Servicii Publice*, Editura Economică, București

Matei, A. (2003). *Analiza sistemelor administrației publice*, Editura Economică, București, cap. IV. Vezi și Matei, A., (2003), *Economie publică. Analiza economică a deciziilor publice*, Editura Economică, București, cap. VIII

Bădin, V., Despa, R. (1998). *Curs de matematici pentru economiști*, Editura Sylvi, București, pp. 109-150.

Bădin, V., Firică, Oana (1995). *Curs de matematici pentru economiști*, Editura Sylvi, București

Jaba, Elisabeta (1998). *Statistică*, Editura Economică, București