Evaluarea opțiunilor folosind procesul volatilității stocastice și cel al difuziei cu salturi

■

Radu Lupu
Asistent universitar doctor
Academia de Studii Economice București

Abstract. *Option pricing by the use of Black Scholes Merton (BSM) model is based on the assumption that asset prices have a lognormal distribution. In spite of the use of these models on a large scale, both by practioners and academics, the assumption of lognormality is rejected by the history of returns. The objective of this article is to present the methods that developed after the Black Scholes Merton environment and deals with the option pricing model adjustment to the empirical properties of asset returns. The main models that appeared after BSM allowed for special changes of the returns that materialized in jump-diffusion and stochastic volatility processes. The article presents the foundations of risk neutral options evaluation and the empirical evidence that fed the amendment of the lognormal assumption in the first part and shows the evaluation procedure under the assumption of stock prices following the jump-diffusion process and the stochastic volatility process.*

Key words: option pricing; jump-diffusion processes; stochastic volatility processes.

■

Amendarea ipotezei log-normalității prețurilor

Pentru a obține un preț al primei din contractele cu opțiuni europene Black și Scholes (1973) presupun existența unor condiții ideale pe piețele acțiunilor și opțiunilor. Într-o ulterioară calculare a primei de la opțiuni, Merton (1973) a arătat că modalitatea lor de analiză se poate folosi (este valabilă) și în situațiile în care: ratele de dobândă sunt stocastice, acțiunea (activul de bază) plătește dividende și opțiunea poate fi exercitată înainte de scadență (este americană). Thorp (1973) a arătat că dividendele și restricțiile cu privire la operațiunile de *short-selling* nu invalidează modelul BSM. Mai mult, conform Ingersoll (1975), existența unui sistem diferit de impozitare pentru câștigurile de capital și pentru dividende nu creează probleme modelului.

Cercetarea teoretică la nivelul produselor financiare derivate constă în principiu în determinarea unor modele plauzibile pentru proprietățile temporale ale activelor de bază și determinarea primei de risc pentru expuneri la factori de tipul ratelor de dobândă, riscului de volatilitate și riscul salturilor care nu sunt direct evaluate de alte active tranzacționate. Aceste modele și prime de risc „obiective" implică existența unor probabilități neutre la risc care pot fi folosite pentru evaluarea produselor derivate prin actualizarea cu rata aferentă a valorii așteptate viitoare. În condițiile în care probabilitățile neutre la risc pot să aibă parametri de aceeași factură, ele sunt identice numai în cazul unei prime de risc nule pentru toate riscurile relevante.

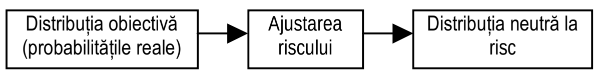

Figura 1. *Procedura necesară evaluării opțiunilor*

Testele empirice ale modelelor de evaluare a opțiunilor examinează dacă diferitele fațete ale densităților de tranziție (probabilităților de tranziție) ale prețurilor activelor de bază și ale derivatelor reflectă informațiile latente în toate produsele derivate după ajustarea riscului. Cele două abordări majore în această direcție au presupus, pe de-o parte, examinarea implicațiilor modelelor estimate din analiza seriilor temporale (analiza istorică a datelor) asupra prețurilor produselor derivate și analizarea prognozelor specifice modelului atât pentru randamentele activului de bază, cât şi pentru cele ale derivatelor pe baza informaţiilor culese din preţurile derivatelor pentru toate contractele la un anumit moment de timp (*cross section of derivatives prices*). Pe de altă parte, cea de-a doua abordare a fost mai des folosită, cel puţin pentru modelele cu variabile latente, de tipul volatilităţii stocastice. Valorile acestor variabile latente pot fi calculate mai uşor din preţul derivatelor decât prin estimarea lor din datele trecute, în cazul în care admitem că modelul este cel corect.

Testele empirice ale modelelor de evaluare a produselor derivate sunt foarte variate datorită implicaţiilor specifice ale modelelor asupra modalităţii de realizare a conversiei probabilităţilor obiective în cele neutre la risc şi a modului în care acestea interacţionează. Bates (2003) prezintă modul în care modelul BSM a fost testat în ultimii 30 de ani:

1. Proprietăţile statistice extrase din seriile temporale ale preţului activului de bază: ipoteza homoscedasticităţii randamentelor procentuale sau logaritmice a fost respinsă de literatura modelelor din familia ARCH, iar ipoteza că preţurile urmează un proces de difuzie simplă a fost respinsă de proprietatea de *fat-tails* a acestora. Efectul de levier remarcat de Black (1976) a indicat existenţa unor interacţiuni mai complicate între randamentele activelor şi volatilitatea acestora decât este presupus prin simpla mişcare browniană geometrică.

2. Proprietăţile cross section ale preţurilor opţiunilor: BSM presupune existenţa unui singur parametru liber, σ, astfel că deviaţia standard implicită dedusă din preţul opţiunilor ar trebui să fie identică pentru mai multe preţuri de exercitare şi maturităţi. Această proprietate a fost respinsă de existenţa *smile*-ului şi a unei structuri non-liniare în raport cu maturitatea opţiunilor.

3. Proprietăţile statistice ale seriilor temporale ale preţurilor opţiunilor: dacă modelul BSM ar fi corect atunci deviaţia standard implicită ar trebui să fie constantă în timp (homoscedasticitate). Analiza seriilor temporale ale preţurilor opţiunilor arată faptul că deviaţia standard se modifică în timp.

4. Preţurile cross section ale opţiunilor şi randamentele activului de bază: compatibilitatea dintre deviaţia standard implicită derivată din preţurile opţiunilor şi volatilitatea activului de bază a fost testată prin regresarea volatilităţilor realizate în raport cu deviaţiile standard implicite. Rezultatele prezentate în Bates (1996) arată că deviaţiile standard implicite sunt deseori statistic diferite şi chiar nişte predictori ineficienţi pentru volatilitatea randamentelor activelor.

5. Preţurile cross section ale opţiunilor şi randamentele opţiunilor: Stein (1989), Diz şi Finucane (1993) şi Campa şi Chang (1995) au examinat dacă structura temporală a deviaţiilor standard implicite este capabilă să prognozeze evoluţia deviaţiilor standard pe termen scurt şi rezultatele au fost neconcludente.

6. Distribuţia comună a randamentelor activelor de bază şi a randamentelor opţiunilor: Bakshi et al. (1997) au remarcat faptul că BSM şi alte modele care folosesc lanţurile Markov cu o singură variabilă induc faptul că între randamentele opţiunilor call şi randamentele activului de bază ar trebui să fie o relaţie directă (şi o relaţie inversă pentru opţiunile put). Rezultatele au relevat faptul că aceste legături sunt invalidate în 7-17% din cazuri pentru date zilnice şi din interiorul zilei pentru opţiunile pe S&P 500 în anul 1994.

Testarea modelului BSM a fost realizată de multe ori în maniera *ceteris paribus*. De exemplu, faptul că opţiunile cu diferite preţuri de exercitare şi maturităţi au dus la volatilităţi implicite diferite a generat iniţial o dezbatere despre cum să construim estimatori ai volatilităţilor implicite care să aducă mai multe informaţii cu privire la relaţiile dintre randamentele opţiunilor şi randamentele activelor de bază în loc să fie considerate ca fiind evidenţe empirice împotriva modelului. Accentul a fost pus mai ales în sensul identificării unor modalităţi care să permită folosirea imediată a modelului de către practicieni în schimbul testării capacităţii efective a modelului de a produce date concludente, realiste (nu s-a pus problema testării validităţii modelului ca atare, ci ajustării modelului la diferitele imperfecţiuni ale pieţei).

Toate aceste dezbateri au dus încă de la publicarea modelului BSM la construirea unei noi generaţii de modele care să răspundă mai bine proprietăţilor statistice ale randamentelor care nu au fost luate în calcul de BSM. Relaxarea ipotezelor care stau la baza BSM a determinat deschiderea unui întreg domeniu de dezbateri – cel al analizelor de după Black Scholes Merton.

Evaluarea opţiunilor prin procesele cu volatilitate stocastică

Vom porni de la premisa că preţul activului este un proces stocastic de forma modelului următor:

$$dS = \mu S dt + \sqrt{V} S dz_S$$
$$dV = k(V^* - V)dt + \sigma_V V dz_V$$

Avem două relaţii – una pentru *medie* şi una pentru *dispersie*. Preţul acţiunii evoluează conform dinamicii descrise de prima ecuaţie şi pentru care dispersia este determinată de cea de-a doua ecuaţie. Este vorba de un proces care descrie o secvenţă (un şir) de variabile aleatoare pentru care dispersia se modifică după cea de-a doua relaţie. O manifestare a şirului de variabile aleatoare este o „potecă” realizată de preţul acţiunii (valorile acestei acţiuni în timp), iar manifestarea unei variabile aleatoare din şir este reprezentată de valoarea acţiunii de la un anumit moment. Dacă volatilitatea (deviaţia standard) ar fi fost constantă, atunci am fi avut o singură ecuaţie – mişcarea browniană geometrică; cea de-a doua ecuaţie prezintă dinamica dispersiei, care este modelată conform Hull și White (1987) după premisa că volatilitatea (ca variabilă stocastică) are o medie pe termen lung *V** către care tinde cu o viteză desemnată de variabila *k*. Astfel, dacă *V* (ultima valoare a acțiunii) a fost mai mică decât media pe termen lung *V**, atunci modificarea de preț până la momentul următor va fi în medie pozitivă, cu o modificare marginală dată de partea a doua a ecuației (de un număr aleator dz_V de ori σ_V) și se va apropia de valoarea mediei pe termen lung cu viteza *k* (în cazul în care *k* ar fi 1, atunci modificarea de peste o perioadă ar fi exact diferența până la media pe termen lung la care adăugăm o anumită împrăștiere dată de a doua parte a ecuației; când *k* este mai mic decât 1 atunci media cu care se modifică dispersia este mai puțin decât diferența de la valoarea din prezent și până la media pe termen lung).

Modelul consideră de asemenea că între cele două procese Wiener dz_s și dz_v există o legătură dată de $E[dz_S dz_V] = \rho dt$. Acest „ingredient" este introdus pentru ca modelul construit să poată capta proprietatea *efectului de levier* (dacă ρ este negativ, atunci o scădere a prețului este acompaniată de o creștere a volatilității – atunci când prețurile scad avem risc mai mare, adică volatilitate mai mare) și totodată un coeficient de asimetrie negativ. În același timp, observăm că un alt coeficient al modelului este volatilitatea volatilității σ_V – valori ridicate ale acestui coeficient vor duce la efectul de „cozi groase" (*fat tails*) ale distribuției (probabilități mari pentru randamentele extreme).

Una dintre problemele care apar în cazul în care prețul acțiunii urmează acest proces, spre deosebire de simplul proces de mișcare browniană geometrică, este că nu putem găsi încă un activ care să fie perfect corelat cu *V* și, prin urmare, construcția unui portofoliu fără risc nu mai este posibilă. Folosirea lemei lui Ito pentru determinarea procesului urmat de o opțiune care are ca activ de bază acțiunea cu acest proces va avea mai mulți termeni deoarece opțiunea este dependentă și de *V*, nu numai de *S* și *t*. Se va obține o integrală stocastică ce nu poate fi rezolvată prin algebră simplă – va fi nevoie de o procedură de simulare Monte Carlo.

Cu alte cuvinte, pentru obținerea unui preț al opțiunii în condițiile în care prețul activului de bază are un proces de evoluție cu volatilitate stocastică vom face următorii pași:

1. Vom înlocui μ cu randamentul titlului fără risc *r*.

2. Vom împărți intervalul de timp până la scadență în *n* intervale mici, astfel că $\Delta t = \frac{T - t}{n}$.

3. Generăm două secvențe de valori extrase din distribuția standard normală cu corelația ρ (cei doi factori de incertitudine pentru cele două ecuații).

4. Pentru anumite valori inițiale S_t și V_t la momentul *t*, folosind cele două ecuații vom genera dispersia V_i și prețul S_i de la momentul *i* din viitor utilizând formulele:

$$V_i = V_{i-1} e^{\left[k\left(V^* - V_{i-1}\right) - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right]\Delta t + \varepsilon_i \sigma_V \sqrt{\Delta t}}$$

$$S_i = S_{i-1} e^{\left(r - \frac{1}{2}V_i\right)\Delta t + e_i \sqrt{V_i \Delta t}}$$

5. Repetăm pașii 3 și 4 de mai multe ori(1) și calculăm media diferențelor *pozitive* (prima unei opțiuni nu poate fi negativă) dintre valoarea finală a activului și prețul de exercitare (deoarece avem de-a face cu o opțiune *call*), adică media pentru $\max(S_T - K,0)$. Aceasta este valoarea așteptată a opțiunii la momentul scadenței.

6. Valoarea din prezent a opțiunii va fi calculată prin actualizarea valorii așteptate a opțiunii de la scadență folosind rata titlurilor fără risc ca rată de actualizare.

Fiecare „potecă" simulată reprezintă o evoluție imaginată a prețului activului atunci când acesta evoluează într-un cadru *neutru la risc* (media procesului este rata fără risc) și tranzacțiile care revelează prețul au loc la momentele stabilite prin construcția simulării.

Evaluarea opțiunilor prin procesele cu salturi

În acest proces pentru evaluarea opțiunilor volatilitatea este stocastică, ceea ce înseamnă că volatilitatea este distribuită normal – valori mari ale dispersiei se obțin rar (cu probabilități mici), ceea ce înseamnă că proprietatea de *fat tail* (adică un coeficient de aplatizare ridicat – *kurtosis* mare) poate fi realizată numai în anumite limite. Un proces care permite un mai bun control al coeficientului de aplatizare este procesul cu salturi (*jump diffusion*) care presupune introducerea unor mișcări de mare amploare la anumite intervale. Prima inițiativă în acest sens a fost realizată de Merton (1976).

Modelul construit de Merton cuprinde două tipuri de dinamică:

1. Vibrațiile normale ale prețului – noua informație pe unitatea de timp determină schimbări marginale ale prețului. Aceasta se modelează cu mișcarea browniană geometrică standard în care volatilitatea este constantă și „poteca" construită de prețuri în timp este continuă.

2. Vibrații „anormale" ale prețului – determinate de apariția unor informații noi cu privire la activul respectiv și care au un efect „mai mult decât marginal" asupra prețului. Acest tip de informație este specifică firmei sau industriei (cazul în care înregistrăm căderi sau creșteri spectaculoase ale prețului pentru o anumită perioadă de timp). Ne așteptăm să ne confruntăm cu perioade *active* când avem astfel de informații și perioade *liniștite*. Aceste perioade sunt aleatoare în sensul că informațiile de acest tip sosesc numai la momente discrete în timp – nu se întâmplă într-o manieră continuă. Aceste vibrații anormale sunt modelate printr-un proces cu salturi.

O atenție deosebită li s-a acordat acestor procese după momentul 13 octombrie 1987 (crahul bursier). În ziua respectivă randamentele au înregistrat o cădere spectaculoasă – au căzut cu de peste 20 de ori σ (ceea ce în termenii distribuției normale este aproape imposibil). O analiză interesantă pentru folosirea unui astfel de proces ar putea fi utilizarea sa pentru piețele emergente care sunt influențate de intrările masive de capital. Astfel de intrări au loc la intervale aleatoare, dar au capacitatea să determine randamente pozitive.

Conform ipotezei piețelor eficiente a lui Fama, Merton consideră dinamica prețurilor ca fiind un *martingale*. Procesul este în timp continuu, astfel că modificările în timp vor fi reprezentate de un proces Wiener, iar salturile vor fi modelate cu ajutorul unui proces Poisson.

Procesul de numărare $\{N(t), t \geq 0\}$ este un proces Poisson cu rata $\lambda > 0$ dacă (Ross, Sheldon, 1983):

a) *N(0) = 0;*

b) Procesul are modificări marginale independente (valoarea de la *t* este independentă de valoarea de la *t-1*);

c) Numărul de evenimente în fiecare interval de timp de lungime are distribuția Poisson cu media $\lambda\Delta t$. Cu alte cuvinte, pentru orice *s* și *t* mai mari ca 0, avem:

$$\Pr\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^n}{n!}$$

În acest fel, putem spune că probabilitatea să avem un eveniment extrem într-un anumit interval de timp *h* este λh, iar probabilitatea de a avea mai mult de două evenimente în același interval de timp este mai mică decât mărimea intervalului de timp. Cu alte cuvinte, este improbabil că vom avea mai mult de un eveniment **rar** în intervalul de timp *h*. Astfel, pentru intervale de timp de mici dimensiuni *h*, vom putea scrie că:

- Probabilitatea ca evenimentul să *nu apară* în intervalul de timp (*t*, *t+h*) este $1 - \lambda h$.
- Probabilitatea ca evenimentul să *apară o singură dată* în intervalul (*t*, *t+h*) este λh.
- Probabilitatea ca evenimentul să *apară de mai multe ori* în intervalul (*t*, *t+h*) este aproape 0.

Următoarea problemă constă în definirea impactului pe care îl are informația specială (evenimentul rar) asupra prețului activului. Este nevoie de o variabilă aleatoare și de precizarea unei distribuții pentru determinarea acestui impact. Dacă *S(t)* este prețul de la momentul *t* al activului și *Y* reprezintă variabila care ne arată cu cât se modifică prețul ca urmare a evenimentului rar, atunci putem scrie că

$$S(t+h) = S(t)Y$$

Dinamica prețurilor după acest aranjament în care avem un proces continuu de modificare a prețului la care adăugăm un proces Poisson va avea forma:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

unde coeficienții au următoarele semnificații:

α este randamentul așteptat instantaneu (pe intervale mici de timp) al activului

σ^2 este dispersia așteptată instantanee atunci când nu avem evenimente rare – descrie procesul simplu de difuzie

dz este un proces Wiener standard

q(t) este procesul Poisson – modificări independente, cu distribuția Poisson

dq și *dz* sunt independente

λ este numărul mediu de evenimente rare pe unitatea de timp

$k = E(Y - 1)$, unde $Y - 1$ este modificarea procentuală (calculată ca randament) a valorii acțiunii dacă procesul Poisson are loc (se manifestă).

Astfel, procesul care generează prețuri ale activului este:

$$\frac{dS}{S} = \begin{cases} (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dz & \text{dacă NU apare saltul} \\ (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dz + (Y - 1) & \text{dacă apare saltul} \end{cases}$$

Se va constitui astfel un eșantion (potecă) de prețuri care va fi o difuzie în cea mai mare parte și va prezenta salturi finite de diferite semne și amplitudini care apar la momente discrete în timp.

Determinarea prețului la opțiunile pe activul care urmează un proces cu salturi necesită formarea aceluiași portofoliu care să elimine elementele de incertitudine. Problema este aceeași ca la volatilitatea stocastică – nu se poate construi un portofoliu format numai din opțiune și activul de bază care să elimine factorii de incertitudine. Apariția celei de-a doua surse de incertitudine determinată de procesul Poisson face construcția portofoliului fără risc imposibilă. Această procedură ar presupune găsirea a două cantități w_1, număr de acțiuni, și w_2, număr de opțiuni, astfel încât, prin punerea lor împreună, să putem realiza hedging-ul celor două surse de incertitudine.

Datorită acestui impediment o formulă a prețului opțiunilor atunci când activul urmează un proces cu salturi este imposibil de găsit. Procedura care merită urmată este construcția unui număr mare de simulări Monte Carlo pentru activul de bază, conform cărora procesul activului de bază să fie un *martingale* în lumea neutră la risc – media să fie rata fără risc. Se procedează apoi ca în cazul volatilității stocastice – se calculează valoarea medie a tuturor prețurilor posibile ale opțiunilor care se actualizează cu randamentul fără risc. Merton (1976) găsește o formulă pentru prețul opțiunii presupunând că CAPM este obținut în piață și că piața este eficientă. În aceste condiții riscul aferent procesului Poisson este un risc specific ce poate fi înlăturat prin diversificare. Având în vedere faptul că o astfel de ipoteză nu este plauzibilă, considerăm că nu este necesară prezentarea.

Volatilitate stocastică și difuzie cu salturi

Un proces de mare notorietate este cel care pune împreună volatilitatea stocastică și difuzia cu salturi. Bakshi, Cao și Chen (1997) sugerează următorul proces pentru prețul activelor financiare:

$$\frac{dS}{S} = \left(r - \bar{p}\lambda\right)dt + \sqrt{V}dz_S + pdq$$
$$dV = k\left(V^* - V\right)dt + \sigma_V \sqrt{V}dz_V$$

unde se impune ca între incertitudinea generată de procesul mediei dz_S și incertitudinea procesului dispersiei dz_V să existe o corelație ρ pe unitatea de timp; probabilitatea unui salt este λdt – deci q este numărătorul Poisson cu intensitatea λ; p este modificarea procentuală a prețului în cazul unui eveniment rar și are media $\bar{p}$; $\ln(1+p) \sim N\left(\ln(1+\bar{p}) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right)$.

Se apreciază că un astfel de proces este destul de flexibil pentru a permite realizarea tuturor proprietăților statistice ale randamentelor. În primul rând coeficientul de asimetrie al distribuției randamentelor este controlat fie de ρ (efectul de levier) fie de media $\bar{p}$ a salturilor (de exemplu o creștere a mediei va duce la obținerea unor randamente pozitive mai dese, ceea ce va face ca probabilitățile pentru randamentele pozitive extreme să fie mai mari decât cele pentru randamentele negative extreme). În al doilea rând coeficientul de aplatizare este controlat fie de volatilitatea volatilității (coeficientul σ_V) fie de magnitudinea sau variația componentei saltului. Pe de altă parte saltul introduce un factor de discontinuitate care poate controla orice nivel al coeficientului de asimetrie sau de aplatizare atunci când $\lambda, \bar{p}$ și δ sunt mari. Procesul cu volatilitate stocastică al lui Hull și White (1987) nu reușește să genereze un efect de cozi groase de anvergura celui observat în practică și, prin urmare, nu reușește să explice fenomenul de „smile" prezentat mai sus. Introducerea salturilor face ca acest lucru să fie posibil.

O formulă pentru prețul unei opțiuni în cazul în care activul de bază urmează acest proces este dificil de obținut, dar, ca până acum, se poate folosi procedura simulărilor Monte Carlo.

Concluzii empirice

Bakshi, Cao și Chen (1997) au realizat o analiză a tuturor acestor procese pentru determinarea prețului la opțiunile europene care au ca activ de bază indicele S&P 500:

- Introducerea volatilității stocastice este primul lucru care se poate realiza pentru a îmbunătăți modelul BSM.
- Adăugarea componentei salturilor la volatilitatea stocastică poate îmbunătăți și mai mult procedura de determinare a prețului opțiunilor *pe termen scurt*.
- Introducerea ratelor de dobândă stocastice (Cox, Ingersoll și Ross, 1985) poate duce la stabilirea unui preț mai exact pentru opțiunile *pe termen lung*.
- Pentru hedging concluzia este că încorporarea salturilor și a ratelor de dobândă stocastice nu reușește să construiască un proces mai performant decât procesul cu volatilități stocastice.
- Modelele cu volatilitate stocastică, volatilitate stocastică și salturi și cele în care este introdus și un proces stocastic pentru rata de dobândă au probleme de specificație. Pentru a putea ține cont de o asimetrie negativă și aplatizare mare care sunt specifice primelor de la opțiuni, modelele necesită niveluri mult prea mari pentru corelația dintre incertitudinea de la randamente și incertitudinea din ecuația volatilității și valori prea mari ale coeficientului de volatilitate a volatilității.

Notă

(1) Numărul optim de simulări poate fi calculat – el depinde de numărul de parametri care sunt simulați și de numărul perioadelor până la scadență. Evident că cu cât numărul simulărilor este mai mare cu atât precizia de estimare a prețului este mai mare dar calculatorul emite aceste numere prin folosirea unei funcții (o funcție de haos denumită generator de numere aleatoare) cu scopul să producă numere care, după un anumit număr de simulări, formează o distribuție cunoscută. Un număr prea mare de simulări va duce la repetiții – probleme numerice care se datorează generatorului de numere aleatoare și, prin urmare, se folosesc diferite metode pentru reducerea erorii. O soluție ar fi simularea unui număr de valori aleatoare ei și apoi folosirea valorilor antitetice ale acestora (adică (– ei)); se obține astfel un număr dublu de simulări. Procedura este posibilă datorită simetriei distribuției normale în raport cu media (în cazul nostru 0).

Bibliografie

Bakshi, G., Cao C., Z. Chen, „Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models", *Journal of Finance,* vol. LII, 1997, pp. 2003-2049

Bates, D., „Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options", *Review of Financial Studies* nr. 9, 1996, p. 1

Bates, D., „Empirical Option Pricing: a Retrospection", *Journal of Econometrics,* nr. 116, 2003

Black, F, J. Cox, „Valuing Corporate Securities: Liabilities: Some Effects of Bond Indenture Provision", *Journal of Finance*, nr. 31, 1976, pp. 351-367

Black, F., Scholes M., „The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy,* 1973, nr. 81

Campa și Chang, „Testing the Expectations Hypothesis on the term structure of implied volatilities in foreign exchange options", *Journal of Finance,* vol. 50, nr. 2, 1995

Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S., „An Intertemporal General Equilibrium Model of Asse Prices", *Econometrica,* nr. 53, 1985

Diz, F. și Finucane, T.J., „Do the options markets really overreact?" *Journal of Futures Markets,* nr. 13, 1993

Hull, J., White, A., „The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility", *Journal of Finance,* vol. XLII, nr. 2, 1987, pp. 281-300

Ingersoll, „A Theoretical and Empirical Investigation of the dual purpose funds: An application of contingent claims analysis", *Sloan School of Management,* Working Paper (M.I.T. Cambridge), 1975

Merton, R.C., „The Theory of Rational Option Pricing", *The Bell Journal of Economics and Managerial Science,* nr. 7(1), 1973, pp. 141-183

Merton, R.C., „Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics,* nr. 3(1), 1976, pp. 124-44

Ross, Sheldon (1983). *Stochastic processes,* John Wiley & Sons

Stein, J., (1989). „Overreactions in the Options Market", *Journal of Finance*, American Finance Association, vol. 44(4)

Thorp, E.O. (1973) „Extentions of the Black-Scholes option model", 39th Session of the International Statistical Institute, Vienna