Alocații Pareto optimale și finanțarea producției de bunuri publice

▪

Daniela Marinescu
Asistent universitar doctorand
Dumitru Marin
Profesor universitar doctor
Academia de Studii Economice București

Abstract. *This work presents the optimal resource allocation within a* E *economy with* n *goods,* I *consumers and* q *producers. For the given economy, it is determined a competition equilibrium with public goods and its Pareto optimum is verified. Two types for financing the public goods production also proposed.*

Key words: resource; optimal; Pareto; public goods; allocation.

▪

Introducere

Finanțarea producției de bunuri publice poate fi făcută prin mai multe procedee.

Studii recente au abordat diferite aspecte ale modelelor cu bunuri (valori) indivizibile, în particular atenția fiind acordată modelelor în care fiecare individ consumă în mod precis un bun indivizibil – un bun public, de exemplu – și, în plus, o anumită cantitate de bunuri perfect divizibile – bani, de exemplu.

Pentru astfel de modele, existența unor alocații corecte a fost tratată de: Maskin (1985) sau Svensson (1983), iar existența unor echilibre walrasiene a fost demonstrată de Gale (1984), Kaneko și Yamamoto (1986), Maskin (1985), Quinzii (1984) și Svensson (1993). Kaneko (1993) a acordat o atenție deosebită pieței de locuințe.

Un aspect important al echilibrului walrasian este acela al posibilității ca el să poată constitui soluția unui joc strategic de piață, cu alte cuvinte un joc în care strategiile specifice să fie prețuri și cantități (echilibrul cu subscripție).

O astfel de analiză demonstrează existența unei căi consistente a relevării tuturor informațiilor cuprinse în sistemul de prețuri, informații care sunt în primul rând private și, uneori, de un asemenea fel încât indivizii nu manifestă inițiativa de a le revela.

Un joc strategic de piață poate fi definit pe mai multe căi, dar o examinare mai atentă a unei anumite piețe necesită, desigur, roluri specifice.

Pentru modelele care satisfac ipotezele neoclasice obișnuite, implementarea Nash a echilibrelor walrasiene a fost analizată recent de Benassy (1986), Dubey (1982), Hurwicz (1979) și Schmeidler (1980).

În aceste studii este analizat un joc strategic de piață pentru un model cu bunuri indivizibile și bani. Jocul ar putea fi caracterizat ca o licitație publică închisă, unde bunurile indivizibile sunt alocate celor mai mari licitatori.

Rezultă că o condiție suficientă ca un echilibru Nash să fie echilibru walrasian este ca fiecare piață să fie „activă” (cel puțin un bun indivizibil de fiecare tip își schimbă posesorul).

Există, de asemenea, echilibre în care atât vânzătorii, cât și cumpărătorii speculează prea avantajos un preț rezultând o alocație ineficientă. Astfel de deficite sunt eliminate cu echilibre puternice. De fapt, mulțimile de alocații corespunzătoare echilibrelor walrasiene și echilibrelor puternice coincid.(Kanti Bag, 1997, pp. 460-472).

Se cunosc mai multe mecanisme de finanțare a bunurilor publice, de exemplu: subscripția voluntară, echilibrul Lindahl ș.a. Mecanismul Jackson-Moulin reprezintă un astfel de exemplu, adaptat pentru bunuri indivizibile. P. Kanti Bag preia ideile expuse în modelul Jackson-Moulin și le adaptează la un mecanism de finanțare a bunurilor publice divizibile, obținând într-o manieră eficientă rezultatul social și implementarea unei reguli de distribuire a costului utilizând conceptul strategiilor nedominante Nash.

Se pornește de la următoarele ipoteze:

- fiecare agent își cunoaște utilitatea marginală, dar și utilitatea marginală agregată;

- se consideră constantă utilitatea marginală a consumului de bunuri publice;
- suma utilităților marginale se exprimă în funcție de costul marginal;
- se presupune că se poate face agregarea funcțiilor de utilitate individuală ale agenților economici.

Planificatorul (cel care va lua deciziile, în funcție de rezultate) va avea ca obiective:

- să realizeze un mecanism pentru atingerea unui nivel optim social, care să respecte condiția Bowen-Lindahl-Samuelson;
- să distribuie costul total (pentru realizarea bunului public) agenților într-o manieră echitabilă.

1. Alocații Pareto optimale

Considerăm economia *E* formată din:

I consumatori, $h = 1,2,...,I$

n bunuri private, $i = 1,2,...,n$

m bunuri publice, $j = 1,2,...,m$

Bunurile publice sunt produse cu ajutorul bunurilor private după tehnologiile descrise de:

$$y_j = g_j(z_{1j}, z_{2j},..., z_{ij},..., z_{nj}),\ j = 1,2,...,m$$

unde funcțiile $g_j(\cdot)$ sunt continue, de două ori diferențiabile, strict concave și satisfăcând condiția $\frac{\partial g_j}{\partial z_{ij}} > 0, \forall i = 1,2,...,n, \forall j = 1,2,...m$.

Variabila z_{ij} cuantifică un consum din bunul privat *i* folosit la producția a y_j unități de bun public *j*.

Funcția de utilitate pentru consumatorul *h* este:

$$U^h(x_1^h, x_2^h,..., x_i^h,..., x_n^h, y_1, y_2,..., y_j,..., y_m)$$

și vom presupune că U^h este strict crescătoare, continuă, diferențiabilă și strict concavă.

Prin w_i vom nota dotarea inițială (înzestrarea inițială) din bunul *i* la nivelul întregii economii *E*.

Optimul Pareto în această economie este soluția programului:

$$\underset{\{x_i^h, y_j\}}{[\max]} \sum_{h=1}^{I} \alpha^h U^h(x_1^h, x_2^h,..., x_i^h,..., x_n^h; y_1, y_2,..., y_j,..., y_m)$$

cu restricțiile

$$\sum_{h=1}^{I} x_1^h + \sum_{j=1}^{m} z_{1j} \le w_1$$
$$\vdots$$
$$\sum_{h=1}^{I} x_i^h + \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \le w_i$$
$$\vdots$$
$$\sum_{h=1}^{I} x_n^h + \sum_{j=1}^{m} z_{nj} \le w_n$$

$$-y_1 + g_1(z_{11}, z_{21},..., z_{i1},..., z_{n1}) \ge 0$$
$$\vdots$$
$$-y_j + g_j(z_{1j}, z_{2j},..., z_{ij},..., z_{nj}) \ge 0$$
$$\vdots$$
$$-y_m + g_m(z_{1m}, z_{2m},..., z_{nm}) \ge 0$$

unde $\alpha^h > 0, h = 1,2,...,I$ reprezintă ponderile de importanță acordate consumatorilor pentru atingerea nivelului de utilitate U^i.

Evident, variabilele modelului trebuie să fie nenegative, adică:

$$x_i^h \ge 0,\ z_{ij} \ge 0,\ y_j \ge 0,\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...,m$$

Atașând restricțiilor multiplicatorii Lagrange $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n, \mu_1, \mu_2,..., \mu_m$, funcția lui Lagrange asociată programului este:

$$L(\cdot) = \sum_{h=1}^{I} \alpha^h U^h(x_1^h,..., x_i^h,..., x_n^h; y_1,..., y_j,..., y_m) +$$
$$+ \lambda_1 \left[w_1 - \sum_{h=1}^{I} x_1^h - \sum_{j=1}^{m} z_{1j} \right] +$$
$$+ ... + \lambda_i \left[w_i - \sum_{h=1}^{I} x_i^h - \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \right] + ... +$$
$$+ \lambda_n \left[w_n - \sum_{h=1}^{I} x_n^h - \sum_{j=1}^{m} z_{nj} \right] +$$
$$+ \mu_1 [-y_1 + g_1(z_{11}, z_{21},...., z_{n1})] + ... +$$
$$+ \mu_j [-y_j + g_j(z_{1j}, z_{2j},..., z_{nj})] +$$
$$+ ... + \mu_m [-y_m + g_m(z_{1m}, z_{2m},..., z_{nm})]$$

Datorită proprietăților funcțiilor U^h și g_j, $h = 1,2,...,I,\ j = 1,2,...,m$ condițiile necesare de optim sunt și suficiente:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^h} = 0 \Rightarrow \alpha^h \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} - \lambda_i = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 0 \Rightarrow \sum_{h=1}^{I} \alpha^h \frac{\partial U^h}{\partial y_j} - \mu_j = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{ij}} = 0 \Rightarrow -\lambda_i + \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial z_{ij}} = 0$$

$$h = 1,2,...I$$
$$i = 1,2,...,n \tag{3}$$
$$j = 1,2,...,m$$

Se observă că multiplicatorii Kuhn-Tucker λ_i și μ_j sunt strict pozitivi, oricare ar fi $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$.

Din grupul relațiilor (1) obținem:

$$\alpha^h = \frac{\lambda_i}{\frac{\partial U^h}{\partial x_i^h}},\ h = 1,2,...,I,\ i = 1,2,...,n \tag{4}$$

Din (2) și (4) rezultă:

$$\sum_{h=1}^{I} \frac{\partial U^h}{\partial y_j} \Big/ \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} = \frac{1}{\frac{\partial g_j}{\partial z_{ij}}},\ i = 1,2,...,n,\ j = 1,2,...m \tag{5}$$

Grupul relațiilor (5) reprezintă condiția cunoscută în literatura de specialitate sub numele *LINDAHL-BOWEN-SAMUELSON* (suma ratelor marginale de substituție a bunului privat prin bunul public egalează inversul ratei marginale de transformare sau costul marginal). (Laffont, 1988; Laffont, 1993; Varian, 1992).

2. Echilibrul cu subscripție

Dotarea inițială din bunul *i* la nivelul consumatorului *h* este w_i^h, cu $\sum_{h=1}^{I} w_i^h = w_i$.

Presupunem că fiecare consumator *h* subscrie voluntar cu o cantitate z_{ij}^h de bun privat *i* la producția de bun public *j* ($h=1,2,...,I$; $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$).

Atunci:

$$y_j = g_j(\sum_{h=1}^{I} z_{1j}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{2j}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{ij}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{nj}^h),\ j=1,2,...,m$$

Programul de optimizare individuală (pentru consumatorul *h*) devine:

$$[\max]U^h(x_1^h, x_2^h, ..., x_i^h, ..., x_n^h, y_1, y_2, ..., y_m)$$

$$x_1^h + \sum_{j=1}^{m} z_{1j} \le w_1^h$$

$$\vdots$$

$$x_i^h + \sum_{j=1}^{m} z_{ij} \le w_i^h$$

$$\vdots$$

$$x_n^h + \sum_{j=1}^{m} z_{nj} \le w_n^h$$

$$y_1 = g_1(\sum_{h=1}^{I} z_{11}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{21}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{i1}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{n1}^h)$$

$$\vdots$$

$$y_j = g_j(\sum_{h=1}^{I} z_{1j}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{2j}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{ij}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{nj}^h)$$

$$\vdots$$

$$y_m = g_m(\sum_{h=1}^{I} z_{1m}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{2m}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{im}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{nm}^h)$$

$$x_i^h \ge 0,\ z_{ij} \ge 0,\ y_j \ge 0$$

Funcția lui Lagrange asociată problemei este:

$$L(\cdot) = U^h(x_1^h, x_2^h, ..., x_i^h, ..., x_n^h, y_1, y_2, ..., y_m) + \lambda_1\left[w_1^h - x_1^h - \sum_{j=1}^{m} z_{1j}\right] +$$

$$+ ... + \lambda_i\left[w_i^h - x_i^h - \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\right] + ... + \lambda_n\left[w_n^h - x_n^h - \sum_{j=1}^{m} z_{nj}\right] +$$

$$+\mu_1\left[-y_1 + g_1(\sum_{h=1}^{I} z_{11}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{21}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{i1}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{n1}^h)\right] + ... +$$

$$+\mu_m\left[-y_m + g_m(\sum_{h=1}^{I} z_{1m}^h, \sum_{h=1}^{I} z_{2m}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{im}^h, ..., \sum_{h=1}^{I} z_{nm}^h)\right]$$

Condițiile de optim (de ordinul întâi) sunt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} - \lambda_i = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U^h}{\partial y_j} - \mu_j = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_{ij}} = 0 \Rightarrow -\lambda_i + \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial z_{ij}} \cdot \frac{\partial\left(\sum_{h=1}^{I} z_{ij}^h\right)}{\partial z_{ij}^h} = 0 \qquad (8)$$

$$h=1,2,...,I;\ i=1,2,...,n;\ j=1,2,...,m$$

Eliminăm multiplicatorii λ_i și μ_j din relațiile (6), (7) și (8) și obținem:

$$\frac{\dfrac{\partial U^h}{\partial y_j}}{\dfrac{\partial U^h}{\partial x_i^h}} = \frac{1}{\dfrac{\partial g_j}{\partial z_{ij}}} \qquad \begin{matrix} h=1,2,...,I \\ i=1,2,...,n \\ j=1,2,...,m \end{matrix} \qquad (9)$$

Relațiile (9) diferă de grupul relațiilor (5), condiția Bowen-Lindahl-Samuelson.

Echilibrul cu subscripție nu este un optim Pareto datorită faptului că subscrierea este voluntară și fiecare agent are tendința de a avea un comportament de „pasager clandestin”.

Un agent economic *h* și-ar spori contribuția de bun *i*, $i=1,2,...,n$ la producția de bun public *j*, $j=1,2,...,m$ cu cantitatea dz_{ij}^h numai dacă $dU^h \ge 0$. Presupunând că toate celelalte elemente (în afară de z_{ij}^h și y_j) rămân neschimbate, obținem:

$$dU^h = -\frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} dz_{ij}^h + \frac{\partial U^h}{\partial y_j} dy_j \ge 0$$

sau

$$\frac{\dfrac{\partial U^h}{\partial y_j}}{\dfrac{\partial U^h}{\partial x_i^h}} \ge \frac{dz_{ij}^h}{dy_j} \qquad (10)$$

Din relația (10) rezultă că orice consumator *h* este dispus să-și mărească partea cu care contribuie, z_{ij}^h, de bun *i* la finanțarea producției de bun *j*, până când costul marginal $\frac{dz_{ij}^h}{dy_j}$ egalează rata marginală de substituție a bunului privat *i* prin bunul public *j*, adică $\frac{\partial U^h}{\partial y_j} \Big/ \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h}$.

Producția de bun public finanțată pe baza unei subscripții voluntare este suboptimală. Cu cât numărul agenților este mai mare cu atât gradul de suboptimalitate este mai mare.

Pentru cazul particular $n=1, m=1, I$ consumatori și $U^h(x^h, y) = a\ln y + \ln x^h$, unde $a>0$ reprezintă înclinația marginală spre consumul bunului public, obținem:

i. Optimul Pareto: $\tilde{x}^h = \dfrac{w}{I(a+1)}, \tilde{y} = \dfrac{aw}{a+1}$

ii. Echilibrul cu subscripție: $x^{h*} = \dfrac{w}{I+a}, y^* = \dfrac{aw}{a+I}$

Pentru numărul de consumatori *I* foarte mare, cantitatea $y^* = \dfrac{aw}{a+I}$ de bun public diferă semnificativ de producția Pareto optimală ($y^* \to 0$, atunci când $I \to \infty$).

3. Echilibrul Lindahl

Vom arăta că acest tip de alocare restabilește optimalitatea Pareto. Presupunem că, pentru fiecare bun public consumat *j*, $j=1,2,...,m$ și obținut prin tehnologia $y_j = g_j(z_{1j}, z_{2j}, ..., z_{ij}, ..., z_{nj})$, se asociază un preț personalizat, p_j^h, fiecărui agent economic *h*, $h=1,2,...,I$.

Atunci programul de optimizare a unui consumator oarecare *h* devine:

$$\max U^h(x_1^h, x_2^h, ..., x_i^h, ..., x_n^h, y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_m)$$

$$\begin{aligned} & p_1x_1^h + p_2x_2^h + ... + p_nx_n^h + p_1^hy_1 + p_2^hy_2 + ... + p_j^hy_j + ... + p_m^hy_m \le \\ & \le p_1w_1^h + p_2w_2^h + ... + p_nw_n^h \end{aligned} \qquad (11)$$

unde:

$p_1, p_2, ..., p_n$ reprezintă prețurile celor *n* bunuri private.

Din rezolvarea problemei de optimizare de mai sus rezultă soluția:

$$\begin{aligned} & x_i^h(p_1, p_2, ..., p_n, p_1^h, ..., p_m^h), \\ & y_j^h(p_1, p_2, ..., p_n, p_1^h, ..., p_m^h),\ h=1,2,...,I,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m \end{aligned}$$

Vom presupune că producția de bun public *j* este realizată de o firmă care anunță prețul bunului public ca fiind $q_j = \sum_{h=1}^{I} p_j^h$.

Comportamentul firmei de maximizare a profitului conduce la rezolvarea problemei:

$$\max\left\{\sum_{h=1}^{I} p_j^h y_j - p_1z_{1j} - p_2z_{2j} - ... - p_nz_{nj}\right\}$$

cu restricția: (12)

$$\begin{aligned} & -y_j + g_j(z_{1j}, z_{2j}, ..., z_{ij}, ..., z_{nj}) \ge 0 \\ & y_j \ge 0, z_{ij} \ge 0 \end{aligned}$$

Echilibrul Lindahl este definit ca:

a) Un vector de prețuri $(p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*)$ pentru bunurile private și vectorul $(p_1^{1*}, ..., p_1^{I*}, p_2^{1*}, ..., p_2^{I*}, ..., p_m^{1*}, ..., p_m^{I*})$ pentru bunurile publice.

b) O alocație de consum, soluție a programului (11).

c) O alocație de producție, soluție a programului (12) astfel încât cererea să fie egală cu oferta.

Se observă că spațiul bunurilor s-a mărit în felul acesta cu *(m-1)I*, devenind n + mI, față de n + I.

Vom arăta că echilibrul Lindahl este și un optim Pareto. Programul (11) are funcția Lagrange asociată:

$$\begin{aligned} & L(x_1^h, ..., x_n^h, y_1, ..., y_m, \lambda) = U^h(x_1^h, ..., x_n^h, y_1, ..., y_m) + \\ & + \lambda\left[\sum_{j=1}^{m} p_jw_j^h - \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^h - \sum_{j=1}^{m} p_j^hy_j\right] \end{aligned}$$

Condițiile necesare (și suficiente în cazul nostru) se scriu:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} - \lambda p_i = 0 \\ & \frac{\partial U^h}{\partial y_j} - \lambda p_j^h = 0 \\ & h=1,2,...,I, \quad i=1,2,...,n \quad j=1,2,...,m \end{aligned} \qquad (13)$$

Deci, la optim obținem: $\dfrac{\dfrac{\partial U^h}{\partial y_j}}{\dfrac{\partial U^h}{\partial x_i^h}} = \dfrac{p_j^h}{p_i}$ (14)

Asociem funcția lui Lagrange programului (12) și obținem:

$$\begin{aligned} & L(y_j, z_{1j}, ..., z_{ij}, ..., z_{nj}, \lambda) = \sum_{h=1}^{I} p_j^hy_j - p_1z_{1j} - ... - p_nz_{nj} + \\ & + \lambda\left[-y_j + g_j(z_{1j}, ..., z_{ij}, ..., z_{nj})\right] \end{aligned}$$

Condițiile de optim se scriu:

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^{I} p_j^h - \lambda = 0 \\ & -p_i + \lambda\frac{\partial g_j}{\partial z_{ij}} = 0,\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...,m \end{aligned} \qquad (15)$$

Utilizând relația (14) obținem:

$$\sum_{h=1}^{I} \frac{\dfrac{\partial U^h}{\partial y_j}}{\dfrac{\partial U^h}{\partial x_i^h}} = \frac{\sum_{h=1}^{I} p_j^h}{p_i}, \text{ iar din (15) avem: } \frac{\sum_{h=1}^{I} p_j^h}{p_i} = \frac{1}{\dfrac{\partial g_j}{\partial z_{ij}}}$$

Combinând ultimele două rezultate obținem:

$$\sum_{h=1}^{I} \frac{\partial U^h}{\partial y_j} \Big/ \frac{\partial U^h}{\partial x_i^h} = \frac{1}{\dfrac{\partial g_j}{\partial z_{ij}}},\ i=1,2,...,n,\ j=1,2,...m$$

Această ultimă relație este exact relația (5). În încheiere putem spune că echilibrul Lindahl verifică relația Bowen-Lindahl-Samuelson, deci este un optim Pareto.

Bibliografie

Kreps, D. (1990). *A Course in Microeconomics Theory*, Princeton University Press

Laffont, J.J. (1988). *Cours de théorie eonomique, II: Economie de l'incertain et de l'information*, Ed. Economica, Paris

Laffont, J.J., Tirole, J. (1993). *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*, M.I.T. Press

Onno, v.H., Kort, P.M., Paul, J.J.M. (1995). *Dynamic Policies of the Firm (An Optimal Control Approach)*, Berlin, Londra, Paris, New York, Tokio, Hong Kong, Barcelona

Parimal, Kanti Bag, *Journal of Economic Theory* nr. 73, 1997

Varian, J.H. (1992). *Microeconomic Analysis*, London