

Estimarea probabilității de apariție a fenomenelor extreme în cazul Bursei de Valori București folosind distribuții stabile

Daniel Traian PELE

Academia de Studii Economice, București
danpele@ase.ro

Rezumat. *În acest studiu analizăm evoluția indicelui BET al Bursei de Valori București prin intermediul unui model AR-GARCH și estimăm probabilitatea de apariție a unor fenomene extreme, folosind distribuții stabile.*

Folosind seria de timp a indicelui BET a Bursei de Valori București, ajungem la concluzia că folosirea în locul distribuției normale a unor distribuții stabile non-gaussiene poate îmbunătăți semnificativ capacitatea de predicție a unui fenomen extrem.

Cuvinte-cheie: distribuție stabilă; criză financiară; piața de capital.

Coduri JEL: G01, C10.

Cod REL: 11B.

Introducere

Cunoașterea distribuției de probabilitate a randamentelor acțiunilor sau titlurilor este esențială pentru orice inferență statistică ce se realizează în legătură cu piața de capital. În general, se consideră că distribuția majoră ce caracterizează evoluția randamentelor este distribuția normală (gaussiană) sau derivate ale acesteia (de exemplu distribuția log-normală).

Lucrări mai recente (Rachev, 2007) arată că distribuțiile stabile sunt o abordare mult mai bună decât distribuțiile clasice în modelarea financiară. Faptul că distribuția observată a randamentelor este *heavy-tailed* nu poate fi explicat prin intermediul unei distribuții normale. Mai mult, frecvența de apariție a unor fenomene extreme de tipul crizelor financiare este mult mai mare în realitate decât ar lăsa să se întrevadă distribuția gaussiană.

Legătura dintre distribuțiile stabile și criza financiară a fost abordată de către Barunik, Vacha și Vosvrda (2010). În acest studiu, sunt estimați parametrii unor distribuții stabile pentru indicii bursieri ai piețelor din Europa Centrală și SUA, folosind date zilnice și date *intraday*. Analizând distribuția randamentelor pentru perioada 2005-2009, precum și separat, pentru perioadele 2005-2007 (înainte de criza financiară) și 2007-2009 (perioada de criză), autorii ajung la concluzia că există o diferență semnificativă între distribuția de probabilitate a randamentelor înainte și în timpul crizei financiare. Astfel, perioada de dinaintea crizei financiare nu prezintă o abatere foarte mare de la distribuția normală, în vreme ce perioada crizei este caracterizată printr-o abatere semnificativă de la normalitate.

În studiul nostru ne propunem să investigăm comportamentul indicelui BET al BVB în perioada 2000-2010, folosind date zilnice.

Studiul este structurat astfel: prima secțiune conține o prezentare teoretică a distribuțiilor stabile și a metodelor de estimare a acestora, în secțiunea a doua este estimat un model de predicție a valorilor extreme negative ale randamentului indicelui BET, iar ultima secțiune este destinată concluziilor.

1. Distribuțiile stabile

Familia distribuțiilor stabile este o clasă de distribuții care au proprietatea de a fi invariante la combinații liniare, distribuția gaussiană fiind un caz particular al distribuțiilor stabile.

Dificultatea ce apare în cazul distribuțiilor stabile este aceea că în cele mai multe cazuri nu se cunoaște o formă explicită a funcției densitate de probabilitate, ci doar expresia funcției caracteristice.

Astfel, o variabilă aleatoare X urmează o distribuție stabilă de parametri $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (Nolan, 2009) dacă există $\gamma > 0, \delta \in \mathfrak{R}$ astfel încât X și $\gamma \times Z + \delta$ să

aibă aceeași distribuție, unde Z este o variabilă aleatoare cu funcția caracteristică

$$\phi(t) = E[e^{iZ}] = \begin{cases} \exp(-|t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t)]), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-|t| [1 + i\beta t \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) (\ln(|t|))]), & \alpha = 1 \end{cases}$$

În notația de mai sus $\alpha \in (0, 2]$ este parametrul caracteristic (*stability index*), ce controlează grosimea cozilor (pentru distribuția gaussiană $\alpha = 2$), $\beta \in [-1, 1]$ este parametrul ce controlează asimetria, $\gamma \in (0, \infty)$ este parametrul de scală și $\delta \in \mathbb{R}$ este parametrul de locație.

Spunem că o variabilă aleatoare X urmează o distribuție stabilă $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ dacă funcția sa caracteristică are forma

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t) (|\gamma t|^{1-\alpha} - 1)] + i\delta t), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |t| [1 + i\beta t \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) (\ln(|\gamma t|))]) + i\delta t), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Spunem că o variabilă aleatoare X urmează o distribuție stabilă $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ dacă funcția sa caracteristică are forma

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |t|^\alpha [1 - i\beta \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) \text{sign}(t)] + i\delta t), & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |t| [1 + i\beta t \frac{2}{\pi} \text{sign}(t) (\ln(|t|))]) + i\delta t), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Parametrizarea $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ are avantajul că este mai facilă la manipulări algebrice, deși funcția caracteristică nu este continuă pentru toți parametrii.

Parametrizarea $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ este recomandată pentru simulări numerice și inferență statistică, deși forma funcției caracteristice o face mai dificil de utilizat pentru calcule algebrice.

Nolan (2011) arată că între cele două parametrizări există totuși o corespondență; astfel, dacă $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$ și $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$, atunci

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \ln \gamma, & \alpha = 1 \end{cases}.$$

Faptul că pentru cele mai multe dintre distribuțiile stabile nu există o formă funcțională explicită a funcției densitate de probabilitate face ca metodele de estimare să nu fie deloc triviale, în special din punct de vedere computațional.

Comportamentul distribuțiilor stabile este dat în special de valoarea parametrului α : cu cât acesta este mai mic decât 2 (valoarea specifică distribuției normale), cu atât probabilitatea asociată cozilor distribuției este mai mare.

2. Modelul AR-GARCH pentru randamentul indicelui BET

Este bine-cunoscut faptul că în general seria de timp a randamentelor unui activ financiar prezintă caracteristici speciale precum fenomenul de *volatility clustering*, prezența cozilor groase, abaterea de la normalitate, volatilitatea stocastică.

Modelele cu volatilitate stocastică redau proprietățile seriilor de timp reale ale randamentelor, în special fenomenul de volatilitate stocastică și cel de *volatility clustering*.

De asemenea, numeroase cercetări empirice arată că există o structură de corelație în seria de timp a randamentelor, în sensul că randamentele zilnice prezintă o memorie temporală de cel puțin o zi.

Pentru a analiza impactul crizei financiare asupra indicelui BET am folosit datele zilnice ale valorilor indicelui BET, al Bursei de Valori București, în perioada 2000-2010.

În analiză am utilizat seria randamentelor zilnice r_t , unde $r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$, P_t fiind valoarea indicelui la momentul t .

Pentru a modela evoluția randamentului indicelui BET, am folosit un model AR (1)-GARCH (1,1), care reține atât memoria temporală, cât și volatilitatea stocastică.

Astfel, presupune că randamentul r_t are următoarea exprimare:

$$\begin{cases} r_t = \mu + \phi_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

În modelul de mai sus, presupunem că z_t reprezintă un șir de variabile aleatoare *iid*, de medie zero.

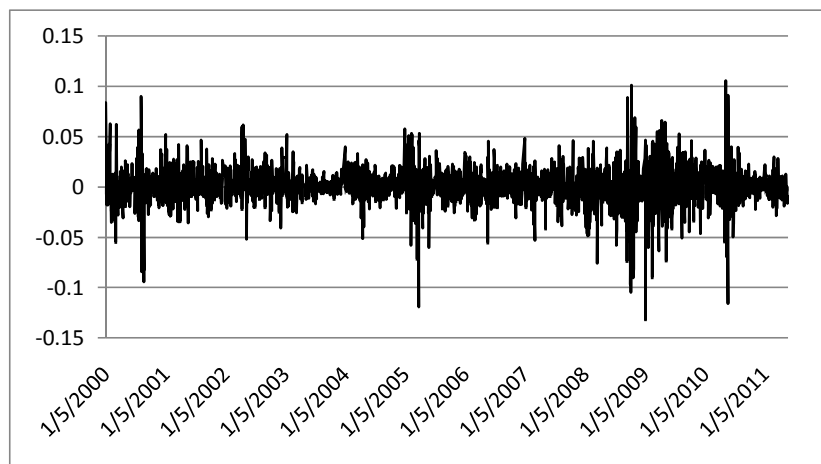


Figura 1. *Randamentele zilnice ale indicelui BET*

Modelul AR-GARCH poate fi folosit pentru a estima probabilitatea de apariție a unor valori extreme negative ale randamentului indicelui BET.

În cele ce urmează vom considera drept valoare extremă negativă orice valoare a randamentului zilnic mai mică decât 10%; în perioada 2000-2011 au fost patru astfel de evenimente extreme.

Tabelul 1

Valorile extreme negative ale randamentului indicelui BET (2000-2011)

Data	Valoarea indicelui BET	Valoarea randamentului r_t
1/7/2009	2741.46	-0.13117
3/28/2005	4504.4702	-0.11902
5/25/2010	4365.9902	-0.11612
10/10/2008	3187.77	-0.10454

Pentru a estima probabilitatea de apariție a unui astfel de eveniment extrem la momentul t^* , aplicăm strategia următoare (Kim, Rachev et al., 2010):

- estimăm parametrii modelului AR-GARCH prin metoda verosimilității maxime folosind observațiile din perioada $[1, t^* - 1]$, presupunând pentru inovațiile ε_t o distribuție normală;
- estimăm parametrii modelului AR-GARCH prin metoda verosimilității maxime folosind observațiile din perioada $[1, t^* - 1]$, presupunând pentru inovațiile ε_t o distribuție t (Student);
- reziduurile modelului estimat folosind distribuția t sunt folosite pentru a estima parametrii unei distribuții stabile $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$;
- probabilitatea de apariție a evenimentului extrem de la momentul t^* se poate estima pe baza distribuției inovațiilor: $P(\varepsilon_t \leq \varepsilon_{t^*-1})$;
- intervalul de apariție a unor astfel de evenimente extreme se estimează prin relația:
$$\frac{1}{250P(\varepsilon_t \leq \varepsilon_{t^*-1})}$$
.

Tabelul 2

Parametrii distribuției stabile a reziduurilor modelului AR-GARCH

Data	Valoarea indicelui BET	Valoarea randamentului indicelui BET	α	β	γ	δ
1/7/2009	2741.46	-0.13117	1.5969	-0.0202	8.72E-03	5.43E-06
3/28/2005	4504.47	-0.11902	1.5385	0.1069	7.64E-03	-1.71E-04
5/25/2010	4365.99	-0.11612	1.5776	-0.0189	9.32E-03	2.98E-05
10/10/2008	3187.77	-0.10454	1.6348	-0.0169	8.65E-03	-1.29E-05

Valorile parametrilor distribuțiilor stabile estimați pentru cele patru evenimente extreme arată abateri extreme față de distribuția normală.

Volatilitatea estimată conform modelului AR-GARCH cu inovații stabile prezintă o memorie temporală mai semnificativă decât în cazul modelului cu inovații gaussiene.

Tabelul 3

Parametrii modelului AR-GARCH

Data	Model	μ	ϕ_1	ω	α_1	β_1
1/7/2009	Normal	0.001	0.159	0.00001	0.189	0.783
	Stable	0.001	0.135	0.00001	0.252	0.719
3/28/2005	Normal	0.001	0.170	0.00001	0.142	0.839
	Stable	0.001	0.147	0.00001	0.228	0.755
5/25/2010	Normal	0.001	0.132	0.00001	0.204	0.780
	Stable	0.001	0.117	0.00001	0.235	0.753
10/10/2008	Normal	0.001	0.158	0.00001	0.176	0.800
	Stable	0.001	0.133	0.000	0.239	0.733

Tabelul 4

Probabilitatea de apariție a evenimentului extrem

Data	r_t	Model	$P(r_t < r_{t'})$	Intervalul mediu de revenire (ani)
1/7/2009	-0.13117	Normal	1.210E-16	3.31E+13
		Stable	0.0021	1.910
3/28/2005	-0.11902	Normal	5.402E-14	7.40E+10
		Stable	0.0025	1.618
5/25/2010	-0.11612	Normal	2.154E-10	1.86E+07
		Stable	3.283E-03	1.218
10/10/2008	-0.10454	Normal	1.953E-10	2.05E+07
		Stable	0.0022	1.804

Estimând probabilitatea de apariție a unei valori extreme negative a randamentului, se observă că modelul bazat pe distribuția normală oferă predicții extrem de optimiste. Astfel, în cazul zilei de 10 octombrie 2008, când indicele BET a înregistrat o corecție negativă de 10%, iar activitatea Bursei a fost oprită, probabilitatea estimată de modelul gaussian este de $1,953 \cdot 10^{-10}$, mult mai mică decât probabilitatea de succes a unei variante simple la popularul joc LOTO 6/49 (această probabilitate este $7,151 \cdot 10^{-8}$). În plus, intervalul de revenire al unui astfel de eveniment este estimat, conform distribuției normale, la $2,05 \cdot 10^7$ ani, în vreme ce, spre comparație, vârsta universului este estimată la $13,75 \cdot 10^9$ ani.

Modelele bazate pe distribuții stabile acordă acestor evenimente extreme o probabilitate de apariție mult mai realistă, iar intervalul de revenire este aproximativ de 1-2 ani, ceea ce corespunde mult mai bine realității empirice.

Concluzii

Modelarea fenomenelor de pe piața de capital a fost multă vreme fundamentată pe paradigma gaussiană, conform căreia randamentele activelor tranzacționate urmează o distribuție normală. Deși are multe proprietăți utile, distribuția normală subestimează sever probabilitatea de apariție a fenomenelor extreme.

În acest studiu am arătat, folosind seria de timp a indicelui BET a Bursei de Valori București, că folosirea în locul distribuției normale a unor distribuții stabile non-gaussiene poate îmbunătăți semnificativ capacitatea de predicție a unui fenomen extrem.

Mulțumiri

Această lucrare a fost cofinanțată din Fondul Social European, prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, proiect numărul POSDRU/89/1.5/S/59184 „Performanță și excelență în cercetarea postdoctorală în domeniul științelor economice din România”.

Bibliografie

- Barunik, J., Vacha, L., Vosvrda, M., „Tail Behavior of the Central European Stock Markets during the Financial Crisis”, *Working Papers IES* 2010/04, Charles University Prague, Faculty of Social Sciences, Institute of Economic Studies
- Kim, Y., Rachev, S., Bianchi, M., Mitov, I. Fabozzi, F., „Time Series Analysis For Financial Market Meltdowns”, No 2, *Working Paper Series In Economics*, 2010, Karlsruhe Institute Of Technology (KIT), Department Of Economics And Business Engineering, <http://Econpapers.Repec.Org/Repec:Zbw:Kitwps:2>
- Nolan, J.P., „Stable Distributions - Models For Heavy Tailed Data”, 2011, Boston: Birkhauser. Unfinished Manuscript, Chapter 1 Online At Academic2.American.Edu/_Jpnolan
- Rachev, S., Mitnik, S., „Stable Paretian Models In Finance”, John Wiley, *Series In Financial Economics And Quantitative Analysis*, 2000, Chechester, New York